И. А. КАПЛАН

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть IV

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

(Издание 2-е, стереотипное)

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1971

517(07)
К20

Книга содержит разбор и подробное решение типовых задач по интегральному исчислению и интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, кратным и криволинейным интегралам.

Большое количество задач для упражнений снабжено указаниями, промежуточными результатами и ответами.

Книга соответствует новой программе по высшей математике. Она рассчитана на студентов высших технических учебных заведений, а также может быть полезна преподавателям, ведущим практические занятия.

Ответственный редактор
кандидат физико-математических
наук доцент *Р. В. Солодовников*

$\frac{2-2-3}{22-71}$

ХАРЬКОВСКАЯ ТИПООФСЕТНАЯ ФАБРИКА «КОММУНИСТ»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III

Стр.

Предисловие 5

Первое практическое занятие. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование 7

Второе практическое занятие. Интегрирование показательной и тригонометрической функций 23

Третье практическое занятие. Продолжение упражнений в непосредственном интегрировании 32

Четвертое практическое занятие. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). Интегрирование по частям 46

Пятое практическое занятие. Простейшие дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие 59

Шестое практическое занятие. Интегрирование простейших рациональных дробей 69

Седьмое практическое занятие. Интегрирование рациональных дробей 80

Восьмое практическое занятие. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции 90

Девятое практическое занятие. Интегрирование алгебраических иррациональностей 117

Десятое практическое занятие. Интегральная сумма. Определенный интеграл и его основные свойства. Задачи механики и физики, приводящие к вычислению предела интегральной суммы. Вычисление определенного интегральной суммы 148

Одиннадцатое практическое занятие. Задачи механики и физики, приводящие к определенному интегралу (продолжение) 161

Двенадцатое практическое занятие. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Теорема о среднем значении 176

Тринадцатое практическое занятие. Несобственные интегралы по бесконечному интервалу и от разрывных функций. Принцип сравнения несобственных интегралов с положительными подынтегральными функциями 188

Четырнадцатое практическое занятие. Приближенное вычисление интегралов: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона (формула парабол) 202

Пятнадцатое практическое занятие. Приложения определенного интеграла к геометрии. Определение площадей плоских фигур . . . 209

Шестнадцатое практическое занятие. Приложения определенного интеграла к геометрии (продолжение): длина дуги плоской кривой, объем тела вращения, поверхность тела вращения 224

Семнадцатое практическое занятие. Дифференциальные уравнения первого порядка 244
Восемнадцатое практическое занятие. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка 270
Девятнадцатое практическое занятие. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков 297
Двадцатое практическое занятие. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 329
Двадцать первое практическое занятие. Уравнение Эйлера. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (основные понятия) 358

Часть IV

Первое практическое занятие. Двойные интегралы. Вычисление площадей при помощи двойного интеграла 375
Второе практическое занятие. Вычисление объемов и поверхностей при помощи двойного интеграла. Приложения двойного интеграла к задачам механики 400
Третье практическое занятие. Тройной интеграл 417
Четвертое практическое занятие. Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции плоских фигур и тел 446
Пятое практическое занятие. Криволинейные интегралы 467
Шестое практическое занятие. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал 479
Седьмое практическое занятие. Формула Грина. Вычисление пло-в при помощи криволинейного интеграла 490

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга содержит практические занятия по интегральному исчислению функций одной независимой переменной и интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, кратным и криволинейным интегралам.

Как и первые две части, вышедшие ранее, книга рассчитана прежде всего на студентов, обучающихся заочно и по вечерней системе.

Она написана в полном соответствии с новой программой по высшей математике для высших технических учебных заведений.

Весь материал книги разделен на отдельные практические занятия. В каждое из них включены основные положения теории, формулы, теоремы, определения и подробное решение типовых задач различной степени трудности с их полным анализом, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения с методическими указаниями, промежуточными результатами и ответами. Многие задачи решаются различными способами, и целесообразность этих способов сравнивается.

Такое построение книги предоставляет студенту широкие возможности для активной самостоятельной работы.

Студент, пользующийся этим пособием, должен перед каждым практическим занятием выучить относящийся к нему раздел теории, внимательно, с выполнением всех действий на бумаге, разобрать решенные задачи и только после этого приступить к решению задач, предложенных для самостоятельного решения.

Книга может быть полезна и студентам, обучающимся в стационарных высших технических учебных заведениях, а также преподавателям, ведущим практические занятия.

Автор приносит глубокую благодарность рецензенту этой книги доктору физико-математических наук профессору Г. М. Баженову и её ответственному редактору кандидату физико-математических наук доценту Р. В. Солодовникову, ценные советы и замечания которых способствовали значительному улучшению книги.

Автор признателен сотрудникам кафедры высшей математики Харьковского инженерно-строительного института В. Г. Александрову, Э. Б. Александровой, И. М. Каневской, З. Ф. Паскаловой, В. М. Аветисовой и Л. В. Олейник, проверившим ответы к задачам, а также Р. А. Ежовой за помощь в оформлении рукописи.

Часть IV
Практические занятия по кратным и криволинейным интегралам

ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Двойные интегралы. Вычисление площадей при помощи двойного интеграла.*

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

В прямоугольных координатах дифференциал площади

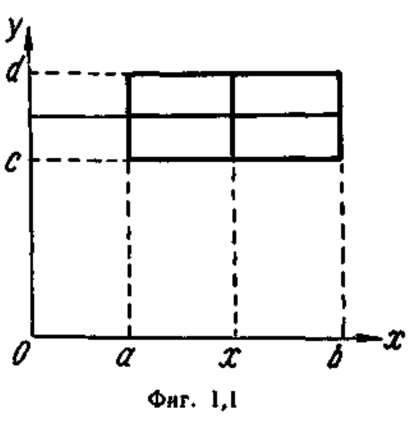
$$d\sigma = dx\,dy,$$

а двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{1,1}$$

а) Двойной интеграл по прямоугольнику

Если область (σ), на которую распространяется двойной интеграл (1,1), — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и определяемыми уравнениями $x = a$; $x = b$ $(a \leqslant x \leqslant b)$; $y = c$; $y = d$ $(c \leqslant y \leqslant d)$ (фиг. 1,1), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:



Фиг. 1,1

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx \tag{1,2}$$

или

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{1,3}$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул, называются *повторными*, или *двукратными*.

В формуле (1,2) интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ называется внутренним. Он вычисляется в предположении, что переменная y сохраняет на отрезке $[a, b]$ зафиксированное постоянное значение. При таком предположении подынтегральная функция $f(x, y)$ является функцией только одной переменной x. В результате вычисления этого интеграла получится функция переменной y.

После того, как эта функция определена, надо выполнить внешнее интегрирование — проинтегрировать полученную функцию по переменной y. В результате этого вторичного интегрирования получится уже не функция, а число.

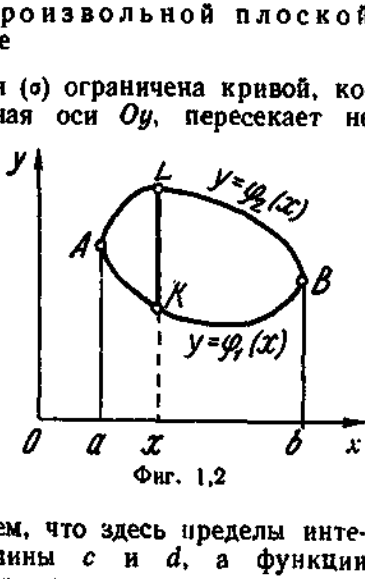
Таким образом, при вычислении двойного интеграла по формуле (1,2) первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной x при постоянном y, а второе интегрирование — по переменной y.

Если же для вычисления двойного интеграла применяется формула (1,3), то порядок интегрирования меняется: первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной y в предположении, что переменная x на отрезке $[c, d]$ сохраняет постоянное зафиксированное значение, а повторное (внешнее) интегрирование — по переменной x. В результате вычисления внутреннего интеграла $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$ получится функция переменной x, а повторное интегрирование даст число.

б) Двойной интеграл по произвольной плоской фигуре

1. Если область интегрирования (σ) ограничена кривой, которую каждая прямая, параллельная оси Oy, пересекает не более чем в двух точках (фиг. 1,2), то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{1,4}$$



Фиг. 1,2

Интеграл в правой части этой формулы также называется *повторным*, или *двукратным*.

Внутренний интеграл в этой формуле отличается от внутреннего интеграла в формуле (1,3) тем, что здесь пределы интегрирования не постоянные величины c и d, а функции переменной x. При вычислении внутреннего интеграла в подынтегральной функции $f(x, y)$ надо x рассматривать как величину постоянную.

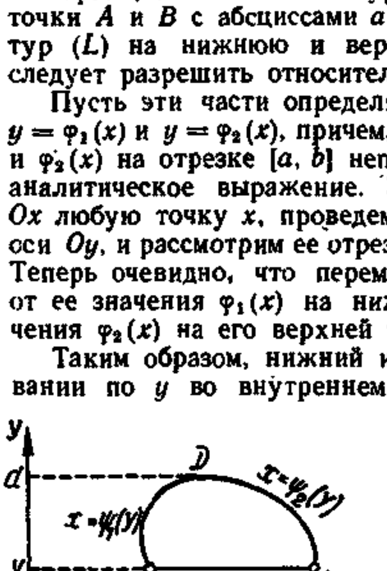
Пределы интегрирования в повторном интеграле в правой части формулы (1,4) находятся так.

1. Область (σ) проектируется на ось Ox. Этим определится отрезок $[a, b]$, на котором в области (σ) изменяется переменная x: $a \leqslant x \leqslant b$. Числа a и b $(a < b)$ будут соответственно нижним и верхним пределами во внешнем интеграле. Тем самым пределы интегрирования по x определены.

Чтобы найти пределы интегрирования по y во внутреннем интеграле, пометим на контуре (L), ограничивающем область (σ), точки A и B с абсциссами a и b. Эти две точки разделят контур (L) на нижнюю и верхнюю части, уравнения которых следует разрешить относительно переменной y.

Пусть эти части определяются соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем, предполагается, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[a, b]$ оси Ox любую точку x, проведем через нее прямую, параллельную оси Oy, и рассмотрим ее отрезок KL, содержащийся в области (σ). Теперь очевидно, что переменная y изменяется в области (σ) от ее значения $\varphi_1(x)$ на нижней части контура (L) до ее значения $\varphi_2(x)$ на его верхней части: $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$.

Таким образом, нижний и верхний пределы при интегрировании по y во внутреннем интеграле соответственно равны $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. После вычисления внутреннего интеграла получится функция переменной x.



Фиг 1,3

Подчеркнем особо, что во внутреннем интеграле при интегрировании по y пределы интегрирования в общем случае есть функции переменной x, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла считалась постоянной.

2. Если область (σ) ограничена кривой, которую любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает не более чем в двух точках (фиг. 1,3), то двойной интеграл, распространенный на эту область, может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (1,5)$$

Здесь также пределы во внутреннем интеграле — не числа, как в формуле (1, 2), а функции переменной y.

Чтобы найти пределы во внешнем интеграле, область (σ) проектируется на ось Oy. Так определяется отрезок $[c, d]$, на котором в области (σ) изменяется переменная y: $c \leqslant y \leqslant d$. Числа c и d и будут соответственно нижним и верхним пределами во внешнем интеграле. Внутренний интеграл вычисляется по переменной x.

В подынтегральной функции $f(x, y)$ надо y рассматривать как величину постоянную. Чтобы определить пределы изменения переменной x в области (σ), пометим на контуре (L) точки C и D с ординатами c и d. Эти две точки разделят контур (L) на левую и правую части, *уравнения которых следует разрешить относительно переменной* x.

Пусть этими уравнениями будут соответственно $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем предполагается, что функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ на отрезке $[c, d]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[c, d]$ оси Oy любую точку y, проведем через нее прямую, параллельную оси Ox, и рассмотрим ее отрезок MN, содержащийся в области (σ).

Переменная x будет изменяться в области (σ) от ее значения $\psi_1(y)$ на левой части контура (L) до ее значения $\psi_2(y)$ на его правой части: $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$.

Таким образом, верхний и нижний пределы во внутреннем интеграле соответственно равны $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$. Подчеркнем, что здесь во внутреннем интеграле при интегрировании по x пределы интегрирования в общем случае есть функции переменной y, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла остается постоянной. После вычисления внутреннего интеграла получится функция переменной y. Следует обратить внимание на то, что во внешнем интеграле в обоих случаях пределы интегрирования — величины постоянные и в результате вычисления двойного интеграла должна получиться постоянная величина.

Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области (σ), то значение повторного интеграла, распространенного на эту область, не зависит от порядка интегрирования по различным аргументам.

Перед решением задач рекомендуется повторить уравнения поверхностей второго порядка. Особое внимание следует обратить на уравнение сферы, параболоида, конуса и цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными координатным осям.

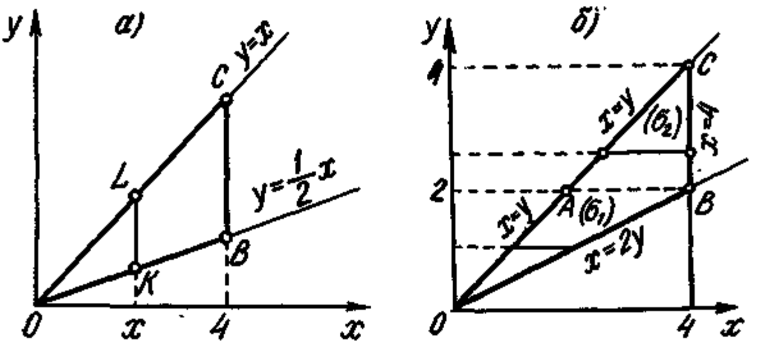
Свойства определенных интегралов распространяются и на двойные интегралы. В формуле (1,4) и (1,5) для вычисления двойного интеграла предполагалось, что кривая, ограничивающая область интегрирования (σ), пересекается всякой прямой, параллельной одной из координатных осей, не больше чем в двух точках. Если это условие не выполнено, то область (σ) следует разбить на части так, чтобы в каждой из частей это условие выполнялось.

Вычисление двойного интеграла последовательными однократными интегрированиями. Изменение порядка интегрирования

Задача 1,1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(\sigma)} (x^3 + y^3)\, dx\, dy,$$

если область (σ) ограничена линиями $y = \frac{1}{2}x$; $y = x$; $x = 4$. Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования.



К задаче 1,1

Решение. Прежде всего следует представить на чертеже область (σ). Контур этой области пересекается всякой прямой, параллельной оси Oy в двух точках. Воспользуемся сперва формулой (1,4)

$$\iint_{(\sigma)} (x^3 + y^3)\, dx\, dy = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{x} (x^3 + y^3)\, dy.$$

Здесь в повторном интеграле внутреннее интегрирование производится по переменной y, а внешнее — по x.

Пределы интегрирования в повторном интеграле получены так: область (σ) была спроектирована на ось Ox. Получился отрезок $[0; 4]$. Этим были определены нижний предел 0 и верхний предел 4 изменения переменной x во внешнем интеграле. Затем на отрезке $[0; 4]$ оси Ox была выбрана произвольная точка x, через которую проведена прямая, параллельная оси Oy, и на ней рассмотрен отрезок KL, содержащийся в области (σ).

Область (σ) ограничена снизу прямой $y=\frac{1}{2}x$, сверху — прямой $y=x$. Переменная y изменяется в области (σ) от ее значения $\frac{1}{2}x$ на нижней части контура OBC до ее значения x на верхней части этого контура. (Уравнения линий, ограничивающих область (σ), должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл).

Вычисления следует начинать с внутреннего интеграла

$$\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x}(x^3+y^3)\,dy,$$

в котором величина x должна рассматриваться как постоянная.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x}(x^3+y^3)\,dy=x^3y+\frac{y^4}{4}\Big|_{\frac{1}{2}x}^{x}=x^3\left(x-\frac{1}{2}x\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(x^4-\frac{1}{16}x^4\right)=\frac{47}{64}x^4.$$

Заметьте, что получилась функция переменной x, как это и следовало ожидать, на основании пояснений на стр. 6.

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$\int\limits_{0}^{4}\frac{47}{64}x^4dx=\frac{47}{64}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{0}^{4}=\frac{47}{64}\cdot\frac{4^5}{5}=\frac{752}{5}.$$

Вычислим теперь тот же двойной интеграл, изменив порядок интегрирования: внутреннее интегрирование будем производить по переменной x, а внешнее — по переменной y.

Из чертежа видно, что левая часть контура области (σ) — одна линия, а именно $y=x$, а его правая часть состоит из двух линий OB и BC, определяемых разными уравнениями: $(OB)\ y=\frac{1}{2}x$; $(BC)\ x=4$. В этом случае область (σ) следует разбить на части так, чтобы каждая из них справа ограничивалась тоже одной линией, иначе говоря, линией, определяемой одним аналитическим выражением. Такими частями будут (σ_1) — OAB и (σ_2) — ABC. Область (σ) является суммой областей (σ_1) и (σ_2).

Интеграл представляется как сумма интегралов

$$\iint\limits_{(\sigma)}(x^3+y^3)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x^3+y^3)\,dx\,dy+\iint\limits_{(\sigma_2)}(x^3+y^3)\,dx\,dy.$$

Так как теперь внутренние интегралы будут вычисляться по переменной x, то уравнения линий, ограничивающих каждую из областей (σ_1) и (σ_2), должны быть решены относительно этой переменной. Решая уравнения линий, ограничивающих области (σ_1) и (σ_2) относительно переменной x, получим, что область (σ_1) ограничена линиями: 1) $x=y$; 2) $x=2y$; 3) $y=2$. Точка B имеет координаты (4,2). Область (σ_2) ограничена линиями:

$$1)\ y=2;\quad 2)\ x=y;\quad 3)\ x=4.$$

Спроектировав каждую из областей интегрирования (σ_1) и (σ_2) на ось Oy, получим пределы внешних интегралов: в первом интеграле — 0 и 2, во втором интеграле 2 и 4. Выбрав на отрезке [0; 2] произвольную точку y и проведя через нее прямую, параллельную оси Ox, замечаем, что в области (σ_1) переменная x изменяется от ее значения, равного y на левой части контура (т. е. на OA), до ее значения $2y$ на его правой части (т. е. на OB).

Таким образом, при интегрировании по области (σ_1) во внутреннем интеграле пределами будут y и $2y$. Поэтому

$$I_1=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x^3+y^3)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{2y}(x^3+y^3)\,dx.$$

При вычислении внутреннего интеграла переменная y должна считаться величиной постоянной (а пределы интегрирования есть функции переменной y, т. е. опять-таки той переменной, которая при интегрировании остается величиной постоянной).

Вычисления начинаем с внутреннего интеграла:

$$\int\limits_y^{2y}(x^3+y^3)\,dx=\frac{x^4}{4}+y^3x\Big|_y^{2y}=\frac{1}{4}[(2y)^4-y^4]+$$

$$+y^3(2y-y)=\frac{19}{4}y^4.$$

Следует заметить, что получилась функция переменной y, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл. Подставляем полученное выражение под знак внешнего интеграла:

$$I_1=\int\limits_0^2\frac{19}{4}y^4\,dy=\frac{19}{4}\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^2=\frac{152}{5}.$$

Пределы внешнего интеграла при интегрировании по области (σ_2) уже были определены: переменная y в этой области изменяется на отрезке [2; 4], т. е. от 2 до 4. Чтобы определить, в каких пределах в этой области изменяется переменная x, возьмем на отрезке [2; 4] произвольную точку, проведем через нее прямую, параллельную оси Ox, и заметим, что на левой части AC контура области (σ_2) x имеет значение, равное y, а на BC — правой его части $x=4$.

Таким образом, в области (σ_2) пределами интегрирования по x будут y и 4, а

$$I_2 = \iint\limits_{(\sigma_2)} (x^3 + y^3)\,dx\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^4 (x^3 + y^3)\,dx.$$

Внутренний интеграл (в нем y — величина постоянная!)

$$\int\limits_y^4 (x^3 + y^3)\,dx = \frac{x^4}{4} + y^3 x \Big|_y^4 = \frac{1}{4}(4^4 - y^4) + y^3(4 - y) =$$

$$= 64 + 4y^3 - \frac{5}{4}y^4.$$

Заметьте! Получилась функция переменной y, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл. Подставляем полученное выражение под знак внешнего интеграла:

$$I_2 = \int\limits_2^4 \left(64 + 4y^3 - \frac{5}{4}y^4\right) dy = 64y + y^4 - \frac{1}{4}y^5 \Big|_2^4 = 120.$$

Искомый интеграл равен сумме

$$I_1 + I_2 = \frac{152}{5} + 120 = \frac{752}{5}.$$

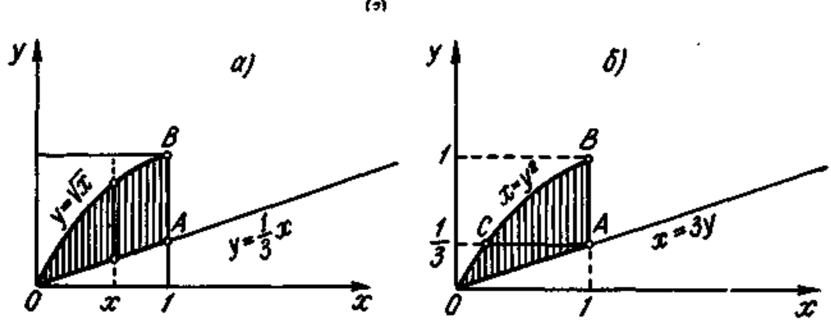
Поскольку подынтегральная функция $x^3 + y^3$ непрерывна, то результаты вычислений, как и следовало ожидать, совпали: они не зависят от порядка интегрирования.

Из этого примера видно, что выбор порядка интегрирования не безразличен. Выбрав рационально порядок интегрирования, можно сократить вычисления.

После столь подробного решения этой задачи предложим несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 1,2 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy.$$



К задаче 1,2

Область (σ) ограничена линиями: $y = \frac{1}{3}x$; $y = \sqrt{x}$; $x = 1$.

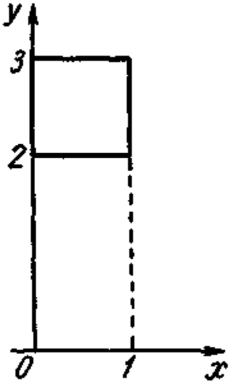
Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования.

Указание. 1) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{x^2}\,dy = \frac{121}{486}$.

Промежуточные вычисления:

$$\int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{x^2}\,dy = \frac{y^4}{4x^2}\Bigg|_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{324}x^2.$$

2) Если изменить порядок интегрирования и внутренний интеграл вычислить по переменной x, а внешний интеграл — по y, то область интегрирования надо разбить на две: (σ_1) — OCA и (σ_2) — CAB. Это вызвано тем, что правая часть контура OAB, ограничивающего область (σ), состоит из двух линий OA и AB, определяемых разными уравнениями: (OA) $x = 3y$; (AB) $x = 1$ (уравнения линий, ограничивающих контур, должны быть в этом случае решены относительно переменной x, т. е. той переменной, по которой ведется интегрирование):



К задаче 1,3

$$I = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{3}} dy \int\limits_{y^2}^{3y} \frac{y^3}{x^2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} \frac{y^3}{x^2}\,dx}_{I_2};$$

$$\int\limits_{y^2}^{3y} \frac{y^3}{x^2}\,dy = y - \frac{1}{3}y^2;\ I_1 = \frac{25}{486};$$

$$\int\limits_{y^2}^{1} \frac{y^3}{x^2}\,dx = y - y^3;\ I_2 = \frac{16}{81};$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{121}{486}.$$

Задача 1,3 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} (6xy^2 - 12x^2y)\,dx\,dy.$$

В повторном интеграле внутренний интеграл вычислить по x, а внешний — по y. Произвести вычисление того же интеграла, изменив порядок интегрирования. Область (σ) — квадрат со сторонами: $x = 0$; $x = 1$; $y = 2$; $y = 3$.

Указание. В первом случае внутренний интеграл

$$\int_0^1 (6xy^2 - 12x^2y)\,dx = 3y^2 - 4y$$

(при интегрировании по переменной x получилась функция переменной y).

Во втором случае внутренний интеграл

$$\int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)\,dy = 38x - 30x^2$$

(при интегрировании по переменной y получилась функция x).

Ответ. 9.

Задача 1,4 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

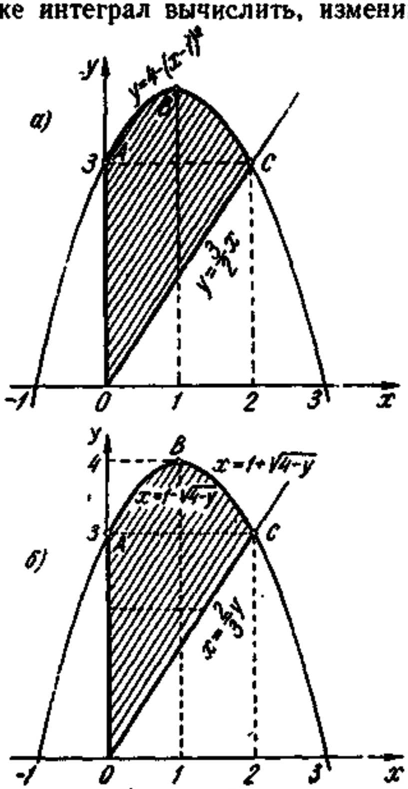
$$\iint\limits_{(\sigma)} (x + y)\,dx\,dy.$$

В повторном интеграле внутреннее интегрирование выполнить по y, а внешнее — по x. Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования. Область (σ) ограничена линиями: $x = 0$; $y = \frac{3}{2}x\ (x > 0)$; $y = 4 - (x - 1)^2$.

Указание. При вычислении внутренних интегралов уравнения линий, ограничивающих область (σ), должны быть решены относительно переменной y, т. е. той, по которой вычисляется внешний интеграл. Разрешая уравнение параболы $y = 4 - (x - 1)^2$ относительно x, получаем $x = 1 \pm \sqrt{4 - y}$, причем линия AB определяется уравнением $x = 1 - \sqrt{4 - y}$, а линия BC уравнением $x = 1 + \sqrt{4 - y}$.

Ответ.

$$I = \int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} (x + y)\,dy = \frac{208}{15}.$$



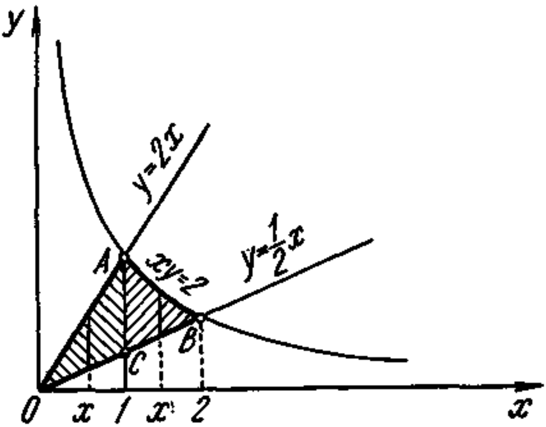
К задаче 1,4

После изменения порядка интегрирования

$$I=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{\frac{2}{3}y}(x+y)\,dx+\int\limits_3^4 dy\int\limits_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}}(x+y)\,dx.$$

Задача 1,5 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y)\,dx\,dy.$$



К задаче 1,5

В повторном интеграле выполнить внутреннее интегрирование по y, а внешнее — по x. Произвести вычисления, изменив порядок интегрирования. Область (σ) ограничена линиями

$$y=\frac{1}{2}x;\ y=2x;\ xy=2\ (x\geqslant 0).$$

Указание. Область (σ) ограничена снизу одной линией $y=\frac{1}{2}x$, а сверху — двумя линиями — OA и AB, имеющими уравнения $y=2x$ (OA) и $y=\frac{2}{x}$ (AB). Область (σ) следует представить как сумму двух областей OAC и CAB. Определить абсциссы точек пересечения прямых OA и OB с гиперболой. Они равны 1 и 2. Спроектировать каждую из областей на ось Ox.

После изменения порядка интегрирования для определения пределов во внутренних интегралах уравнения линий разрешить относительно переменной x.

Ответ.

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{2x}(x^2+y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{\frac{2}{x}}(x^2+y)\,dy=4\frac{1}{3}.$$

После изменения порядка интегрирования

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y}(x^2+y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}}(x^2+y)\,dx.$$

Три следующие задачи показывают, что изменение порядка интегрирования может повлечь за собой изменение величины двойного интеграла.

Задача 1,6 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy.$$

Показать, что изменение порядка интегрирования приводит к различным результатам, и объяснить причину этого. Область (σ) — квадрат со сторонами: $x=0$; $x=1$; $y=0$; $y=1$.

Ответ.

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\frac{1}{2};$$

внутренний интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

С другой стороны,

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=-\frac{1}{2};$$

внутренний интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=-\frac{1}{(1+y)^2}.$$

Различные результаты вычислений объясняются тем, что в точке (0,0) подынтегральная функция не является непрерывной.

Задача 1,7 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx\, dy.$$

Область (σ) — квадрат, ограниченный координатными осями и прямыми $x = 1$ и $y = 1$. В повторном интеграле первый раз внутреннее интегрирование выполнить по x, а потом изменить порядок интегрирования. Объяснить причину различных результатов вычислений.

Ответ.

$$1)\ I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx = -\frac{1}{e};$$

$$2)\ I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dy = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

Задача 1,8 (для самостоятельного решения). Показать, что двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy$$

равен $\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$ в зависимости от порядка интегрирования. Объяснить причину этого. Область (σ) — квадрат, ограниченный линиями $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 1$.

II. Двойной интеграл в полярных координатах

В полярных координатах дифференциал площади

$$d\sigma = r\, dr\, d\varphi,$$

а двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi]\, r\, dr\, d\varphi.$$

Область (σ) должна быть отнесена к полярной системе координат. Если она ограничена двумя полупрямыми с уравнениями $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и линиями, определяемыми уравнениями $r = u_1(\varphi)$ и $r = u_2(\varphi)$, а функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ в промежутке $[\alpha, \beta]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение, то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(r,\ \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{u_1(\varphi)}^{u_2(\varphi)} F(r,\ \varphi)\, r\, dr. \qquad (1,6)$$

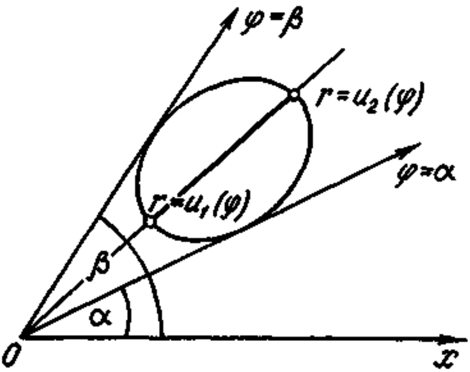
Интеграл в правой части этой формулы — *повторный интеграл* (иначе *двукратный*). Во внутреннем интеграле φ следует рассматривать как величину постоянную (фиг. 1,4).

Напомним уравнения окружности в полярной системе координат, с которыми нам часто придется встречаться:

$$r = R; \qquad (1,7)$$

$$r = 2R\cos\varphi; \qquad (1,8)$$

$$r = 2R\sin\varphi. \qquad (1,9)$$



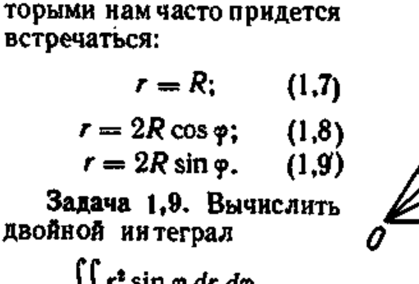
Фиг. 1,4

Задача 1,9. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi,$$

где область (σ) ограничена линиями $r = R$ и $r = 2R\sin\varphi$.

Решение. Чтобы определить, как изменяется в области (σ) полярный угол φ, проведем лучи в точки A и B области (σ).



К задаче 1,9

Решая совместно уравнения линий, ограничивающих область (σ), найдем значения угла φ, соответствующие лучам OA и OB:

$$\left.\begin{aligned} r &= R \\ r &= 2R\sin\varphi \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда

$$2R\sin\varphi = R; \quad \sin\varphi = \frac{1}{2};$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}; \quad \varphi_2 = \frac{5}{6}\pi.$$

Таким образом, угол φ в области (σ) изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5}{6}\pi$.

Теперь найдем пределы изменения полярного радиуса в области (σ). Под произвольным углом φ, взятым в промежутке $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right]$, проведем из полюса луч OD. В точке C входа этого

луча в область (σ) $r = R$, а в точке D выхода его из области (σ) $r = 2R\sin\varphi$ и полярный радиус r изменяется в области (σ) от R до $2R\sin\varphi$. Поэтому нижний и верхний пределы во внутреннем интеграле равны соответственно r и $2R\sin\varphi$.
По формуле (1,6)

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r^2\, dr.$$

(Мы вынесли $\sin\varphi$ за знак внутреннего интеграла, так как при вычислении внутреннего интеграла переменная φ сохраняет постоянное значение).
Внутренний интеграл

$$\int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r^2\, dr = \frac{r^3}{3}\Big|_R^{2R\sin\varphi} = \frac{1}{3}(8R^3\sin^3\varphi - R^3) = \frac{1}{3}R^3(8\sin^3\varphi - 1).$$

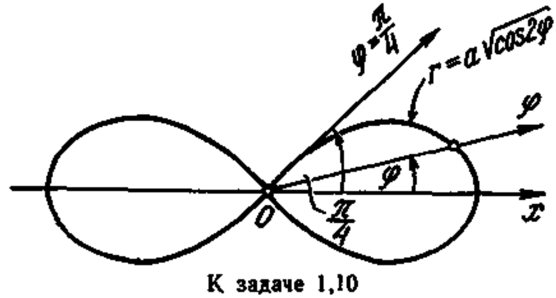
Внешний интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{3}R^3(8\sin^3\varphi - 1)\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}R^3 \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (8\sin^4\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{12}(\pi + 3\sqrt{3}).$$

Задача 1,10. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} r^3\, dr\, d\varphi$,

где (σ) — область, ограниченная полярной осью и кривой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ с дополнительным условием: полярный угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$.



К задаче 1,10

Решение. Кривая $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ — лемниската. Определим, как изменяется угол φ в области (σ). С увеличением угла φ $\left(\text{при условии } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ полярный радиус r уменьшается. При не-котором значении φ он станет равным нулю. Найдем это значение φ.

Подставим в уравнение лемнискаты $r=0$ и получим уравнение для определения φ:

$$0 = a^2\cos 2\varphi; \quad \cos 2\varphi = 0; \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$\left(\text{Учтено условие, что } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, в области (σ) полярный угол изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Чтобы узнать, как изменяется в области (σ) полярный радиус r, проведем луч, пересекающий область (σ) под произвольным углом φ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\right)$. Луч входит в область ($\sigma$) в полюсе, т. е. при $r=0$ и выходит из нее в точке A на лемнискате. В этой точке $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Таким образом, переменная r изменяется в области (σ) от $r=0$ до $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. По формуле (1,6)

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr = \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi.$$

Внешний интеграл.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{1}{8}a^4\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{32}\pi a^4.$$

Дальнейшие упражнения в вычислении двойных интегралов связаны с решением задач геометрии и механики.

III. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma, \tag{1,10}$$

где $d\sigma$ — дифференциал площади.

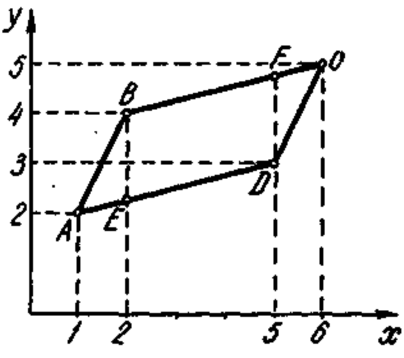
Если фигура отнесена к прямоугольной системе координат, то формула (1,10) перепишется так:

$$S = \iint_{(\sigma)} dx\,dy. \tag{1,11}$$

Если фигура отнесена к полярной системе координат, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \iint_{(\sigma)} r\,dr\,d\varphi. \tag{1,12}$$

Задача 1,11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $2x - y = 0\,(AB)$; $2x - y - 7 = 0\,(DC)$; $x - 4y + 7 = 0\,(AD)$; $x - 4y + 14 = 0\,(BC)$.



К задаче 1,11

Решение. Фигура — параллелограмм. Его вершины находятся в точках: $A(1,2)$; $B(2,4)$; $D(5,3)$; $C(6,5)$.

Область интегрирования (σ) разобьем на три части: $(\sigma_1) = ABE$; $(\sigma_2) = BEDF$; $(\sigma_3) = DFC$;

$$S = \iint_{(\sigma)} dx\,dy = \iint_{(\sigma_1)} dx\,dy + \iint_{(\sigma_2)} dx\,dy + \iint_{(\sigma_3)} dx\,dy. \tag{A}$$

Вычислим каждый из этих двойных интегралов.

В области (σ_1) переменная x изменяется на отрезке $[1,2]$. Выбрав внутри этого отрезка произвольную точку с абсциссой x, проведем прямую, параллельную оси Oy. На отрезке этой прямой, находящемся в области (σ_1), переменная y изменяется от ее значения на отрезке AE до ее значения на отрезке AB. Из уравнения стороны AD

$$y = \frac{x+7}{4}. \tag{B}$$

Из уравнения стороны AB $y = 2x$. Поэтому

$$\iint_{(\sigma_1)} dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{x+7}{4}}^{2x} dy = \frac{7}{8}.$$

В области (σ_2) переменная x изменяется на отрезке $[2,5]$. Выберем на нем произвольную точку x, проведем через нее прямую, параллельную оси Oy. На отрезке этой прямой, содержащемся в области (σ_2), переменная y изменяется от ее значения на прямой AD до ее значения на прямой BC.

Уравнение прямой AD уже разрешено относительно y [см. формулу (B)], а из уравнения стороны BC следует, что

$$y = \frac{x+14}{4}. \qquad (C)$$

Поэтому

$$\iint\limits_{(\sigma_2)} dx\,dy = \int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{\frac{x+7}{4}}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{21}{4}.$$

В области (σ_3) переменная x изменяется на отрезке [5,6], а переменная y — от ее значения на прямой DC до ее значения на прямой BC. Из уравнения DC $y = 2x - 7$, а из уравнения прямой BC $y = \frac{x+14}{4}$ [см. формулу (C)].

Таким образом,

$$\iint\limits_{(\sigma_3)} dx\,dy = \int\limits_{5}^{6} dx \int\limits_{2x-7}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{7}{8}.$$

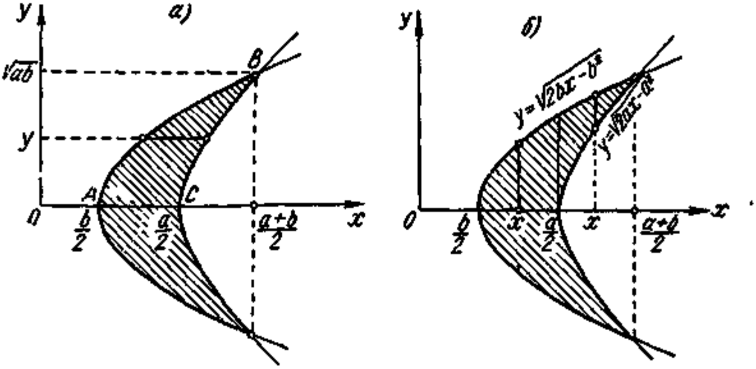
Окончательно из (A) получаем, что

$$S = \frac{7}{8} + \frac{21}{4} + \frac{7}{8}; \qquad S = 7 \text{ кв. ед.}$$

Задача 1,12. Вычислить площадь, ограниченную линиями

$$x = \frac{y^2 + b^2}{2b}; \quad x = \frac{y^2 + a^2}{2a},$$

a и b — положительны и $a > b$.



К задаче 1,12

Решение. Кривые — параболы. Первое интегрирование выгодно вести по переменной x, а второе — по y. Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{y^2+b^2}{2b} \\ x &= \frac{y^2+a^2}{2a} \end{aligned}\right\},$$

найдем координаты точки пересечения парабол:

$$x = \frac{a+b}{2}; \quad y = \pm\sqrt{ab}.$$

Следует учесть, что искомая площадь равна удвоенной площади фигуры ABC. В области ABC переменная x изменяется от ее значения $x = \frac{y^2+b^2}{2b}$ на параболе AB до значения $x = \frac{y^2+a^2}{2a}$ на параболе CB. Переменная же y изменяется от 0 до $\sqrt{ab}$ — ее значения в точке B.

Таким образом, по формуле (1,11) с учетом, что искомая площадь равна удвоенной площади ABC и что внутренний интеграл вычисляется по переменной x,

$$S = 2\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy = 2\int\limits_0^{\sqrt{ab}} dy \int\limits_{\frac{y^2+b^2}{2b}}^{\frac{y^2+a^2}{2a}} dx = 2\int\limits_0^{\sqrt{ab}} \left(\frac{y^2+a^2}{2a} - \frac{y^2+b^2}{2b}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}(a-b)\sqrt{ab} \text{ кв. ед.}$$

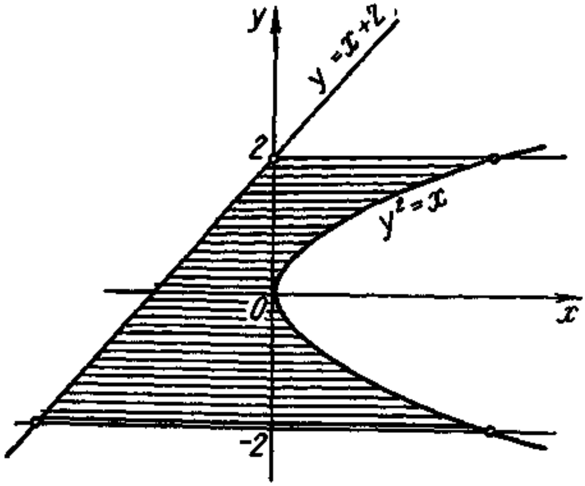
Если изменить порядок интегрирования, вычисляя внутренний интеграл по переменной y, а внешний — по переменной x, то выкладки усложнятся:

$$S = 2\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy = 2\left[\int\limits_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2bx-b^2}} dy + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b}{2}} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2bx-b^2}} dy\right]$$

(для определения пределов во внутренних интегралах уравнения кривых разрешены относительно переменной y, т. е. той переменной, по которой ведется интегрирование).

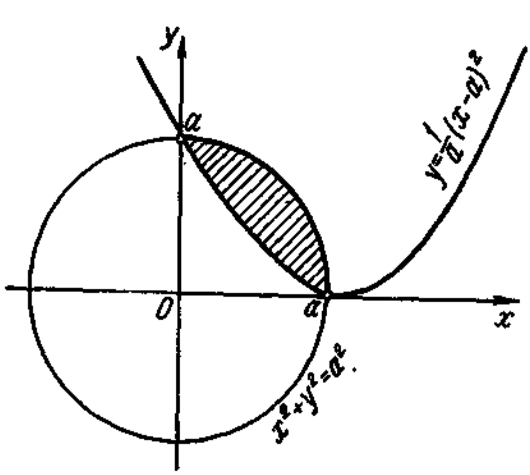
Задача 1,13 (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2$; $y = x + 2$; $y = 2$; $y^2 = x$

Ответ. $\frac{40}{3}$ кв. ед.



К задаче 1,13

Задача 1,14 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{a}(x-a)^2 \, (a > 0)$; $x^2 + y^2 = a^2$.



К задаче 1,14

Указание.

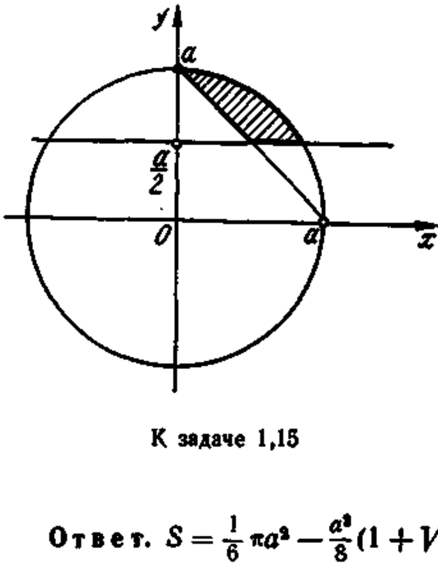
$$S=\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_{\frac{1}{a}(x-a)^2}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

Ответ. $S=\frac{a^2}{12}(3\pi-4)$ кв. ед.

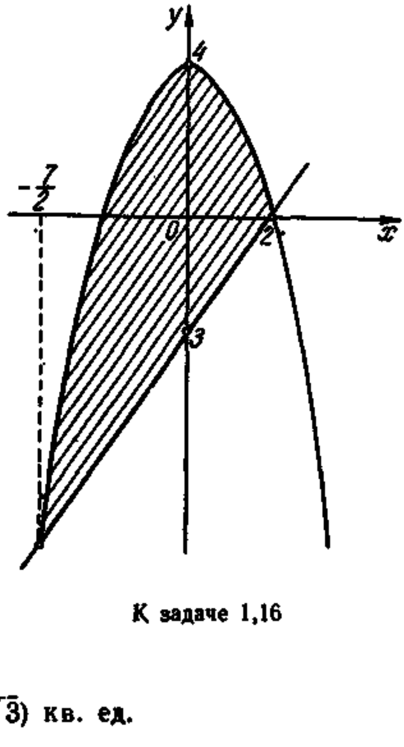
Задача 1,15 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2+y^2=a^2;\ x+y=a;$$

$$y=\frac{a}{2}\left(a>0;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant\frac{a}{2}\right).$$



К задаче 1,15



К задаче 1,16

Ответ. $S=\frac{1}{6}\pi a^2-\frac{a^2}{8}(1+\sqrt{3})$ кв. ед.

Задача 1,16 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $y=4-x^2$; $3x-2y-6=0$.

Указание.

$$S=\int\limits_{-\frac{7}{2}}^{2} dx\int\limits_{\frac{3x-6}{2}}^{4-x^2} dy.$$

Ответ.

$$S=\frac{1331}{48}\text{ кв. ед.}$$

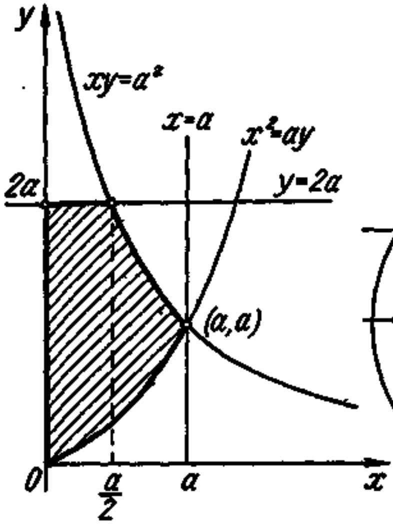
Задача 1,17 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $xy = a^2$; $x^2 = ay$; $y = 2a$; $x = 0\,(a > 0)$.

Указание.

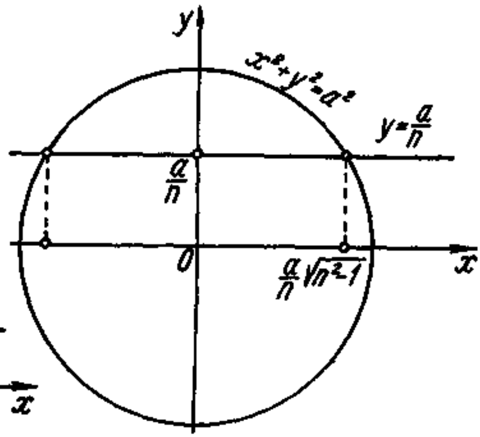
$$S = \int\limits_0^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a} dy + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{\frac{a^2}{x}} dy.$$

Ответ.

$$S = \left(\frac{23}{24}a^2 + a^2 \ln 2\right) \text{ кв. ед.}$$



К задаче 1,17



К задаче 1,18

Задача 1,18 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = a^2;\quad y = \frac{a}{n}\,(a > 0;\quad n > 1).$$

Указание.

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{a}{n}\sqrt{n^2-1}} dx \int\limits_{\frac{a}{n}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

Множитель 2 перед интегралом объясняется симметрией площади относительно оси Oy.

Ответ.

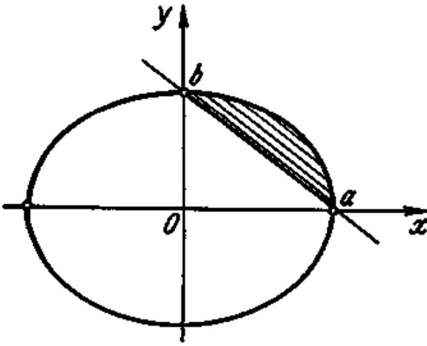
$$S = \frac{a^2}{2}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{2}{n^2}\sqrt{n^2-1}\right) \text{ кв. ед.}$$

Задача 1,19 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

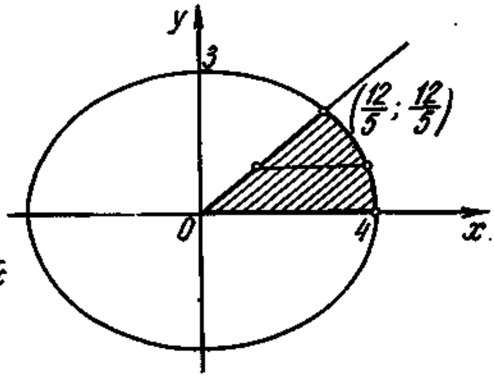
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \quad (a>0;\ b>0).$$

Ответ.

$S=\frac{1}{4}ab(\pi-2)$ кв. ед.



К задаче 1,19



К задаче 1,20

Задача 1,20 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

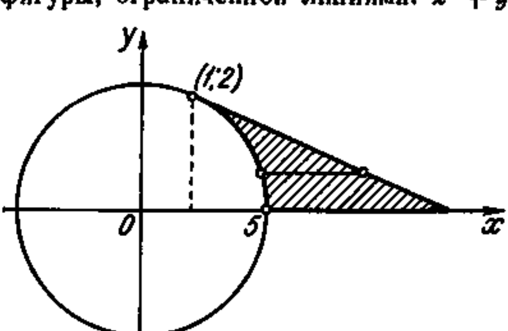
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1; \quad y=x; \quad y=0. \quad (x\geqslant 0;\ y\geqslant 0).$$

Указание. Выгодно сначала интегрировать по переменной x.

Ответ.

$$S=6\arcsin\frac{4}{5} \text{ кв. ед.}$$

Задача 1,21 (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2+y^2=5$, касательной к ней, проведенной в точку с координатами (1,2), и осью Ox.



К задаче 1,21

Указание. Уравнение касательной $x+2y-5=0$. Выгодно внутренний интеграл вычислить по переменной x.

Ответ.

$$S=\left(5-\frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{кв.ед.}$$

Задача 1,22. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x-a)^2+y^2=a^2$ и $x^2+(y-a)^2=a^2$.

Решение. Линии — окружности с центрами в точках $(a, 0)$ и $(0, a)$. Если раскрыть скобки, то уравнения запишутся так:

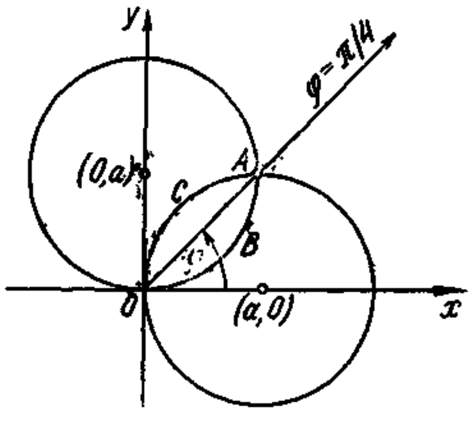
$$x^2+y^2-2ax=0; \tag{A}$$
$$x^2+y^2-2ay=0. \tag{B}$$

Наличие в уравнении кривой выражения x^2+y^2 указывает на возможную целесообразность перехода к полярным координатам (в полярных координатах $x^2+y^2=r^2$; $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$).

Уравнения (A) и (B) в полярных координатах запишутся так:

$$r=2a\cos\varphi; \tag{I}$$
$$r=2a\sin\varphi. \tag{II}$$

Прямая OA делит искомую площадь на две части — $OBAO$ и $OACO$. Легко установить, решая совместно уравнения (I) и (II), что точка A лежит на биссектрисе первого координатного угла. Уравнение луча OA: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.



К задаче 1,22

В области $OBAO$ полярный радиус r изменяется от 0 до его значения на окружности, определяемой уравнением (II), т. е. до $2a\sin\varphi$, а полярный угол φ — от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

В области $OACO$ r изменяется от 0 до его значения на окружности, определяемой уравнением (I), т. е. до $2a\cos\varphi$, а угол φ — от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, на основании формулы (1,12) искомая площадь

$$S=\iint\limits_{(OBAO)} r\,dr\,d\varphi+\iint\limits_{(OACO)} r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{2a\sin\varphi}r\,dr+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}r\,dr.$$

Вычислим внутренние интегралы:

$$\int\limits_0^{2a\sin\varphi}r\,dr=\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\sin\varphi}=2a^2\sin^2\varphi;\qquad \int\limits_0^{2a\cos\varphi}r\,dr=\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\cos\varphi}=2a^2\cos^2\varphi.$$

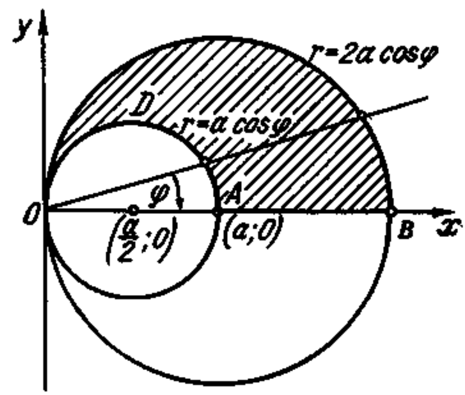
Поэтому площадь

$$S = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\, d\varphi + 2a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

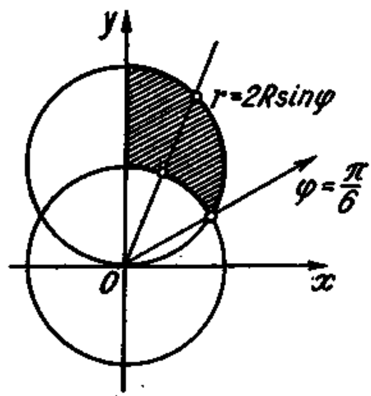
$$= a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) + a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \text{ кв. ед.}$$

Замечание. Легко было сразу усмотреть, что площади частей *OBAO* и *OACO* равны между собой, а потому можно было вычислить площадь по формуле

$$S = 2\iint\limits_{OBAO} r\,dr\,d\varphi.$$



К задаче 1,23



К задаче 1,24

Решение этой задачи в прямоугольных координатах было бы значительно сложнее.

Задача 1,23 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $x^2+y^2-2ax=0$ и $x^2+y^2-ax=0$.

Указание. Уравнения линий преобразовать к полярным координатам. Искомая площадь равна удвоенной площади *ABCODA*

$$S = 2\iint\limits_{(ABCODA)} r\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} dr.$$

Ответ.

$$S = \frac{3}{4}\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

Задача 1,24 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2-2Ry=0$ и $x=0$.

Указание. Линии — окружности. Перейти к полярным координатам.

Ответ.

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{R}^{2R\sin\varphi}r\,dr=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{ кв. ед.}$$

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление объемов и поверхностей при помощи двойного интеграла.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

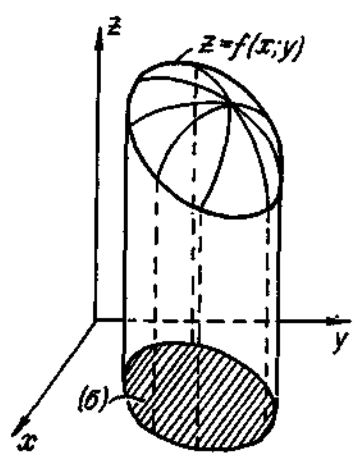
1. Объем цилиндрического тела

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz. Направляющей ее служит контур (l), ограничивающий область интегрирования (σ), лежащую в плоскости xOy и являющуюся нижним основанием этого цилиндрического тела. Сверху тело ограничено поверхностью, определяемой уравнением

$$z=f(x, y). \qquad (A)$$

Таким образом, объем такого цилиндрического тела (фиг. 2,1)

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2,1)$$



Фиг. 2,1

В этой формуле $f(x, y)$ есть правая часть уравнения (A), т. е. уравнения той поверхности, которая сверху ограничивает цилиндрическое тело. Формулу (2,1) удобно записать в виде

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} z\,dx\,dy. \qquad (2,2)$$

Если вычисление ведется в полярных координатах, то эта формула имеет вид

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (2,3)$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ — непрерывна и однозначна в области (σ). (Цилиндрическое тело, о котором идет речь, называется также *криволинейным цилиндром* по аналогии с криволинейной трапецией, а иногда цилиндрическим брусом).

Если область интегрирования (σ) находится в плоскости xOy, то уравнение поверхности, которое сверху ограничивает цилиндрическое тело, должно быть решено относительно переменной z.

II. Площадь кривой поверхности

Если поверхность определяется уравнением $z = f(x, y)$, то площадь той части поверхности, которая проектируется на плоскость xOy в область (σ), вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \tag{2.4}$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ непрерывна и однозначна в области (σ) и имеет в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Обыкновенно вводят обозначения $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, а потому формулу (2,4) можно записать и так:

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \tag{2,5}$$

Для упрощения вычислений иногда выгодно проектировать поверхность, площадь которой вычисляется, не на плоскость xOy, а на плоскость yOz или на плоскость xOz. Тогда уравнение поверхности следует решить в первом случае относительно переменной x, во втором — относительно переменной y, а формула (2,4) запишется соответственно так:

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{yOz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz; \tag{2,6}$$

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz. \tag{2,7}$$

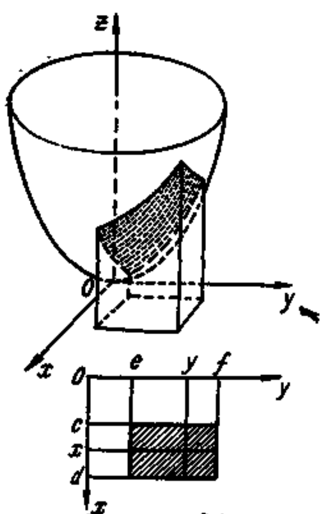
Для применения формул (2,1) — (2,6) следует прежде всего проверить, является ли цилиндрическим тело, объем или поверхность которого вычисляется, какая поверхность ограничивает его сверху, знать ее уравнение, а также установить область (σ), на которую распространяется интегрирование, вычертить эту область на отдельном чертеже и найти уравнение линии (l) — контура области (σ). Следует иметь в виду, что в частном случае образующие боковой цилиндрической поверхности могут быть равны нулю. Это имеет место, например, в задаче 2,3.

1. Вычисление объема тел

Задача 2,1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; 2) $x = c$ 3) $x = d$; $(c < d)$ 4) $y = e$ 5) $y = f$; $(e < f)$ 6) $z = 0$.

Решение. Поверхностями, ограничивающими тело, являются: 1) эллиптический параболоид; 2) и 3) — плоскости, параллельные плоскости yOz; 4) и 5) — плоскости, параллельные плоскости xOz и 6) — плоскость xOy (см. чертеж). Заданное тело цилиндрическое. Объем его вычисляется по формуле (2,2). Подставляя в эту формулу значение z из уравнения поверхности, ограничивающей тело сверху, имеем

$$v = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy. \qquad (A)$$



К задаче 2,1

На плоскости xOy тело вырезает прямоугольник (σ), ограниченный прямыми линиями $x = c$; $x = d$; $y = e$; $y = f$. Первые две параллельны оси Oy, вторые две — оси Ox. Как известно, в этом случае пределы интегрирования в повторном интеграле — величины постоянные. Порядок интегрирования в данном случае безразличен.

Переходя в (A) к повторному интегралу и выполняя первое интегрирование по переменной x, а второе по переменной y, будем иметь

$$V = \int\limits_e^f dy \int\limits_c^d \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx. \qquad (B)$$

Внутренний интеграл $\int\limits_c^d \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{xy^2}{b^2}\Big|_c^d = \frac{d^3 - c^3}{3a^2} + \frac{y^2(d-c)}{b^2} = (d-c)\left[\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right]$.

Подставляя значение внутреннего интеграла в формулу (B), получаем, вынося $d - c$ за знак интеграла,

$$V = (d-c)\int\limits_e^f \left(\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

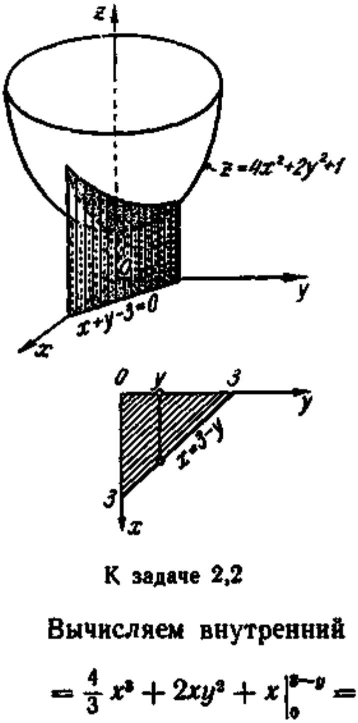
$$= (d-c)\left(\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2}\, y + \frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_e^f =$$

$$= \frac{(d-c)(f-e)}{3} \cdot \left(\frac{c^2 + cd + d^2}{a^2} + \frac{e^2 + ef + f^2}{b^2}\right) \text{ куб. ед.}$$

Задача 2,2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$; $x + y - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Решение. Первая поверхность — эллиптический параболоид, у которого осью симметрии является ось Oz. Он пересекает ее в точке (0, 0,1). Над плоскостью xOy параболоид приподнят на одну единицу масштаба, поверхность $x + y - 3 = 0$ — плоскость, параллельная оси Oz, а остальные поверхности — координатные плоскости.

На плоскости xOy тело вырезает треугольник, ограниченный координатными осями и прямой $x + y - 3 = 0$.



К задаче 2,2

Объем тела вычисляется по формуле (2,2), в которой область интегрирования (σ) — указанный треугольник, а z надо заменить его значением из уравнения той поверхности, которая сверху ограничивает тело,

$$V = \iint\limits_{(\sigma)} (4x^2 + 2y^2 + 1)\,dx\,dy.$$

Преобразуем двойной интеграл в повторный, причем первое интегрирование (внутреннее) будем вести по переменной x, а второе (внешнее) — по переменной y.

При постоянном y переменная x изменяется от $x = 0$ до $x = 3 - y$ (это значение x найдено из уравнения прямой $x + y - 3 = 0$), а y изменяется от 0 до 3. Поэтому

$$V = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1)\,dx \quad \text{(A)}$$

Вычисляем внутренний интеграл $\int_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1)\,dx =$

$$= \frac{4}{3}x^3 + 2xy^2 + x\Big|_0^{3-y} = \frac{4}{3}(3-y)^3 + 2(3-y)y^2 + (3-y) =$$

$$= 39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3}y^3.$$

Подставляя это значение внутреннего интеграла в выражение (A), получаем

$$V = \int_0^3 \left(39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3}y^3\right) dy =$$

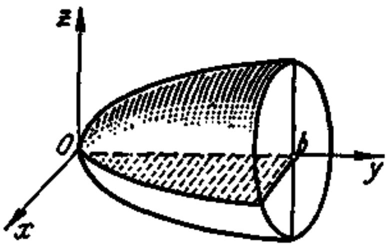
$$= 39y - \frac{37}{2}y^2 + 6y^3 - \frac{10}{12}y^4\Big|_0^3 =$$

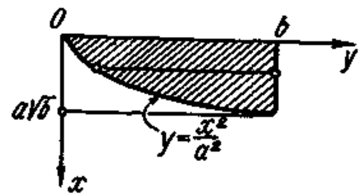
$$= 39.3 - \frac{37}{2}\cdot 9 + 6\cdot 27 - \frac{5}{6}\cdot 81 = 45 \text{ куб. ед.}$$

Задача 2,3. Найти объем тела, отсекаемого плоскостью $y = b$ от эллиптического параболоида

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Решение. Четверть тела, лежащую в первом октанте, можно рассматривать как цилиндрическое тело с образующими, равными нулю. Уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху, решим относительно z и вычислим объем четверти тела, лежащего в первом октанте. Из уравнения поверхности параболоида $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2y - x^2}$ (перед корнем удержан знак плюс, так как в первом октанте $z \geqslant 0$).





К задаче 2,3

На плоскости xOy тело вырезает параболу, уравнение которой $y = \frac{x^2}{a^2}$ получим, решив совместно уравнения параболоида и плоскости xOy

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \\ z &= 0 \end{aligned}\right\};$$

$$\frac{V}{4} = \frac{c}{a}\int_0^{a\sqrt{b}} dx \int_{\frac{x^2}{a^2}}^{b} \sqrt{a^2y - x^2}\, dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int_{\frac{x^2}{a^2}}^{b} \sqrt{a^2y - x^2}\, dy = \frac{2}{3a^2}(a^2b - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому

$$\frac{V}{4} = \frac{2c}{3a^3}\int_0^{a\sqrt{b}} (a^2b - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Здесь удобна подстановка $x = a\sqrt{b}\sin t$. Новыми пределами интегрирования будут 0 и $\frac{\pi}{2}$, а $\frac{V}{4} = \frac{2}{3}ab^2c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt$.

Интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt = \frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

Ответ.

$$V=\frac{\pi ab^2c}{2}\text{ куб. ед.}$$

Если переменить порядок интегрирования, то

$$\frac{V}{4}=\frac{c}{a}\int_0^b dy\int_0^{a\sqrt{y}}\sqrt{a^2y-x^2}\,dx.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{a\sqrt{y}}\sqrt{a^2y-x^2}\,dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2y-x^2}+\frac{a^2y}{2}\arcsin\frac{x}{a\sqrt{y}}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{a^2y}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Задачу можно решить, и не прибегая к двойному интегралу. Пересечем тело плоскостью, перпендикулярной оси Oy. Сечением является эллипс, определяемый уравнением

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2y}+\frac{z^2}{c^2y}=1\\ y=\text{const}\end{aligned}\right\},$$

которое получается из уравнения параболоида, если обе его части разделить на y. Полуоси этого эллипса равны: $a\sqrt{y}$ и $c\sqrt{y}$, а его площадь $S=\pi acy$.

Зная площадь поперечного сечения, объем тела найдем по формуле

$$V=\int_a^b S(y)\,dy.$$

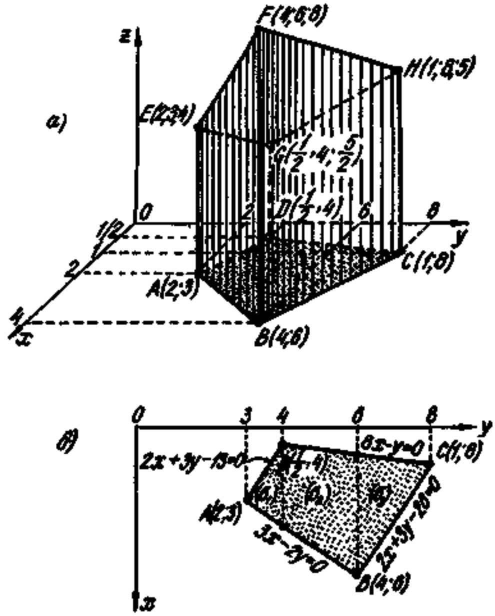
В нашем случае

$$V=\int_0^b \pi acy\,dy=\pi ac\int_0^b y\,dy=\frac{\pi ab^2c}{2}\text{ куб. ед.}$$

Задача 2,4 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $3x-2y=0$; 2) $8x-y=0$; 3) $2x+3y-13=0$; 4) $2x+3y-26=0$; 5) $17x+6y-13z=0$; 6) $z=0$.

Указание. Тело рассмотреть как цилиндрическое. Сверху оно ограничено поверхностью $17x + 6y - 13z = 0$. Ее уравнение следует решить относительно $z: z = \frac{1}{13}(17x + 6y)$ и воспользоваться формулой (2.2). Объем

$$V = \frac{1}{13}\iint\limits_{(\sigma)} (17x + 6y)\, dx\, dy.$$



К задаче 2,4

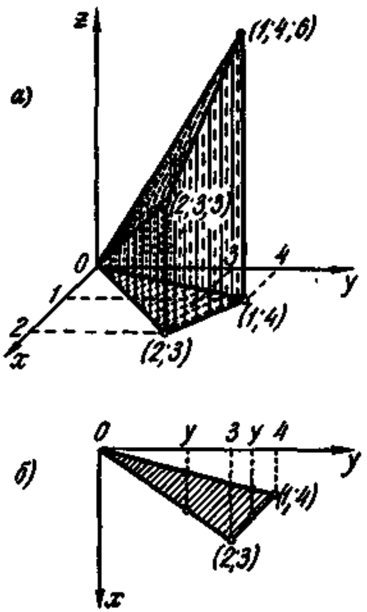
Область интегрирования представить как сумму трех областей: $(\sigma_1) + (\sigma_2) + (\sigma_3)$ (см. чертёж). Внутренние интегралы вычислять по переменной x

$$V = \frac{1}{13}\Bigg[\int\limits_3^4 dy \int\limits_{\frac{13-3y}{2}}^{\frac{2}{3}y} (17x + 6y)\, dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{\frac{y}{8}}^{\frac{2}{3}y} (17x + 6y)\, dx +$$

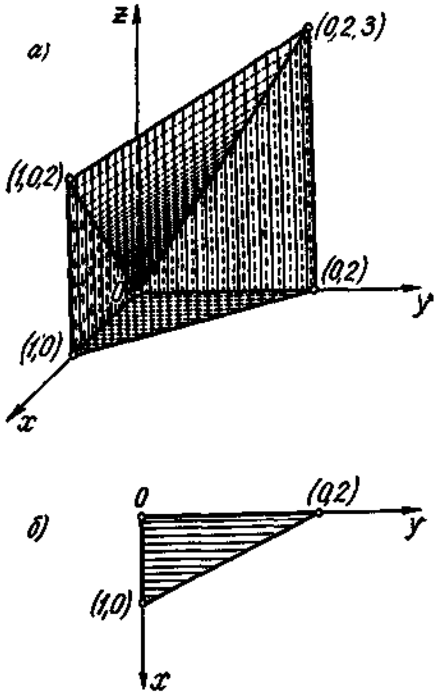
$$+ \int\limits_6^8 dy \int\limits_{\frac{y}{8}}^{\frac{26-3y}{2}} (17x + 6y)\, dx\Bigg].$$

Решение задачи потребует большого числа арифметических выкладок. Первый интеграл в скобках равен $\frac{11\,999}{216}$. Второй интеграл в скобках равен $\frac{150\,917}{432}$. Третий интеграл в скобках равен $\frac{11\,323}{48}$.

Ответ. $V = 49\frac{7}{24}$ куб. ед.



К задаче 2,5



К задаче 2,6

Задача 2,5 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $6x - 9y + 5z = 0$; 2) $3x - 2y = 0$; 3) $4x - y = 0$; 4) $x + y - 5 = 0$; 5) $z = 0$.

Ответ. $x = 7{,}5$ куб. ед.

Задача 2,6 (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $2x + y - 2 = 0$; $4x + 3y - 2z = 0$ и координатными плоскостями.

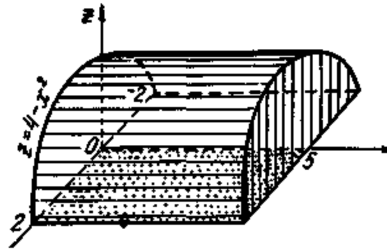
Ответ. $V = \frac{5}{3}$ куб. ед.

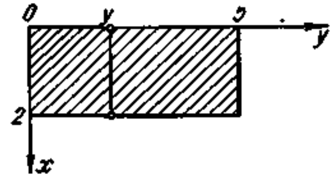
Задача 2,7 (для самостоятельного решения). Определить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = 4 - x^2$ 2) $y = 5$ 3) $y = 0$ 4) $z = 0$.

Указание. В формулу (2,2) подставить z из уравнения поверхности, ограничивающей сверху объем. Эта поверхность —

параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy: $z = 4 - x^2$. Учесть симметрию тела относительно плоскости yOz.

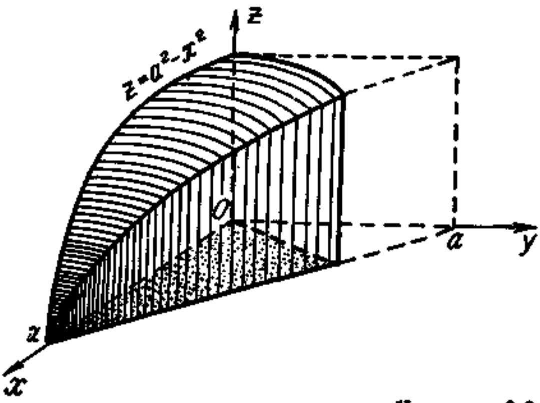
Ответ. $V = 2\int\limits_0^5 dy \int\limits_0^2 (4 - x^2)\,dx$; $V = 53\frac{1}{3}$ куб. ед.

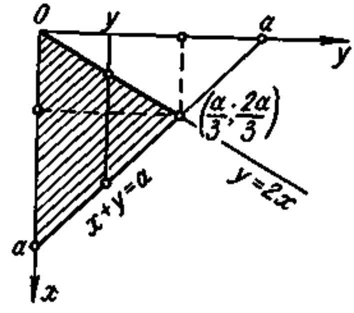




К задаче 2,7

Задача 2,8 (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = a^2 - x^2$; 2) $x + y = a$; 3) $y = 2x$; 4) $z = 0$; 5) $y = 0$.





К задаче 2,8

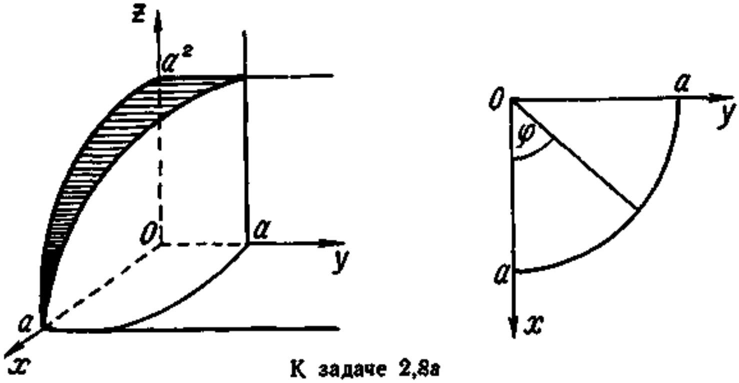
Указание. Первая поверхность — параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси Oy. Эта поверхность ограничивает сверху тело, объем которого вычисляется. В формуле (2,2) вместо z подставить $a^2 - x^2$.

$$V = \int\limits_0^{\frac{2}{3}a} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{a-y} (a^2 - x^2)\,dx.$$

Ответ. $V = \frac{41}{162}a^4$ куб. ед.

Задача 2,8а (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями и поверхностями: $z = a^2 - x^2$; $x^2 + y^2 = a^2$.

Указание. Первая поверхность — параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси Oy, а направляющей является парабола $z = a^2 - x^2$, лежащая в плоскости xOz.



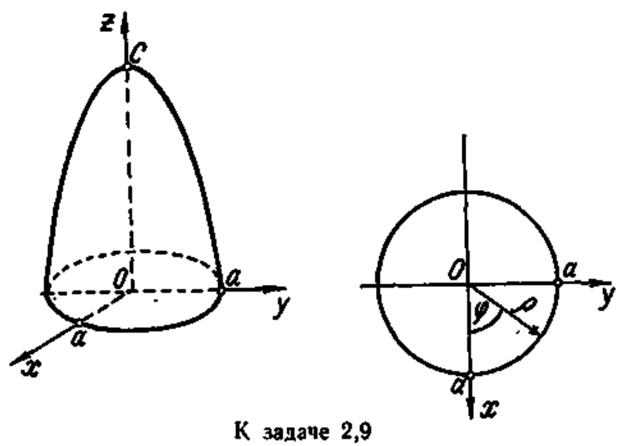
К задаче 2,8а

Вторая поверхность — круговой цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Его направляющей является окружность $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в плоскости xOy.
Объем

$$V = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2)\, dy.$$

Ответ. $V = \frac{3}{16}\pi a^4$ куб. ед.

Задача 2,9 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $c(x^2 + y^2) + a^2 z = a^2 c$ $(c > 0)$; $z = 0$



К задаче 2,9

казание. Поверхность — параболоид вращения. Наличие аемого $c(x^2+y^2)$ в левой части уравнения указывает на то, удобно перейти к цилиндрическим координатам. Област., интегрирования — круг радиуса a. Уравнение поверхности пара- болоида в цилиндрических координатах

$$c\rho^2 + a^2 z = a^2 c; \quad z = \frac{c}{a^2}(a^2 - \rho^2);$$

$$V = \frac{c}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - \rho^2)\rho d\rho.$$

Ответ. $V = \frac{1}{2}\pi a^2 c$ куб. ед.

Эту же задачу решить в прямоугольных координатах.

Задача 2,10. Найти объем тела, ограниченного трехосным эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (A)$$

Решение. Для того, чтобы воспользоваться формулой (2,1), надо уравнение поверхности решить относительно переменной z. Так как поверхность трехосного эллипсоида симметрична относительно координатных плоскостей, то достаточно вычислить восьмую часть объема, расположенную в первом октанте. Решая уравнение (A) относительно z и учитывая, что в первом октанте $z \geqslant 0$, получаем:

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

$$\frac{V}{8} = \iint_{(\sigma)} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy =$$

$$= c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy. \qquad (B)$$

При интегрировании по y переменная x считается постоянной. Удобно для сокращения записей обозначить величину $1 - \frac{x^2}{a^2}$ под корнем через $\frac{d^2}{b^2}$, т. е.

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{d^2}{b^2}.$$

Отсюда следует, что $b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = d^2; \quad \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = d^2.$

Поэтому верхний предел во внутреннем интеграле $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=d$, а внутренний интеграл

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\int\limits_0^d\sqrt{\frac{d^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^d\frac{\sqrt{d^2-y^2}}{b}\,dy=\frac{1}{b}\int\limits_0^d\sqrt{d^2-y^2}\,dy=\frac{1}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{d^2-y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{y}{d}\right]\Bigg|_0^d=\frac{1}{b}\cdot\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{d}{d}=\frac{d^2}{2b}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4b}d^2.$$

Подставим сюда $d^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ и тогда

$$I_1=\frac{\pi}{4b}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{\pi b}{4a^2}(a^2-x^2).$$

Подставляя это значение I_1 в формулу (B), получаем

$$\frac{V}{8}=c\int\limits_0^a\frac{\pi b}{4a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi bc}{4a^2}\int\limits_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi bc}{4a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{\pi bc}{4a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{\pi bc}{4a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{\pi abc}{6}.$$

Итак, $\frac{V}{8}=\frac{\pi abc}{6}$, а $V=\frac{4}{3}\pi abc$ куб. ед.

Если $a=b=c$, эллипсоид становится сферой и тогда объем шара $V=\frac{4}{3}\pi a^3$

2. Вычисление площади поверхности

Задача 2,11. Вычислить площадь той части поверхности $ay=x^2+z^2$, которая находится в первом октанте и ограничена плоскостью $y=2a$.

Решение. Поверхность, площадь которой требуется вычислить, — часть параболоида вращения (ось вращения — Oy), находящаяся в первом октанте и ограниченная плоскостью $y=2a$, перпендикулярной оси Oy. Мы решим задачу двумя способами. Сначала спроектируем вычисляемую поверхность на плоскость xOz, а затем (для сравнения выкладок) — на плоскость xOy.

1) Проекцией поверхности на плоскость xOz является четверть круга, ограниченного окружностью, уравнение которой мы получим, исключая y из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned}ay&=x^2+z^2\\ y&=2a\end{aligned}\right\},$$

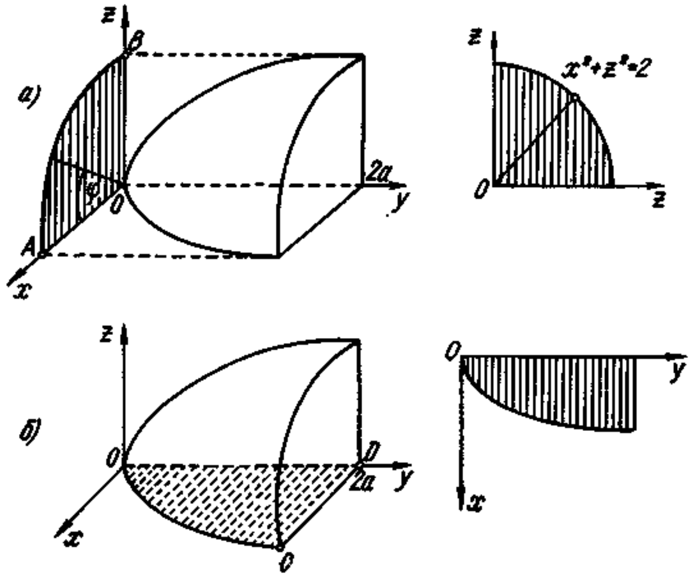
т. е. уравнение этой окружности

$$2a^2 = x^2 + z^2$$

или

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + z^2 = 2a^2 \\ y = 0 \end{array}\right\}. \qquad (A)$$

Так как мы проектировали поверхность на плоскость xOz, то ее уравнение должно быть решено относительно переменной y



К задаче 2,11

(см. стр. 30) и следует воспользоваться формулой (2, 7). Из условия задачи $y = \frac{1}{a}(a^2 + z^2)$.

Чтобы воспользоваться формулой (2, 7), надо определить частные производные $\frac{\partial y}{\partial x}$ и $\frac{\partial y}{\partial z}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{a}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{a}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4z^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)};$$

$$S = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)}\, dx\, dz,$$

где область интегрирования (σ) — четверть круга AOB (см. чертеж к задаче).

Наличие под корнем суммы x^2+z^2 указывает на то, что целесообразно ввести полярные координаты, учитывая, что в этих координатах $x^2+z^2=\rho^2$. Радиус окружности AOB, как видно из уравнений (A), равен $2\sqrt{a}$. Полярный угол φ изменяется в области интегрирования от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2+4\rho^2}\,\rho d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2+4\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{1}{8}\left.\frac{(a^2+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{a\sqrt{2}}=\frac{1}{12}[(a^2+8a^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}]=$$

$$=\frac{1}{12}[(9a^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}]=\frac{1}{12}\cdot 26a^3=\frac{13}{6}a^3.$$

Окончательно $S=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{13}{6}a^3=\frac{13}{12}\pi a^2$ кв. ед.

Теперь решим эту же задачу, проектируя поверхность на плоскость xOy (см. чертеж б) к этой задаче). Для этого надо воспользоваться формулой (2,4) или, что то же, формулой (2,5). Уравнение поверхности должно быть решено относительно переменной z.

Из уравнения поверхности $z=\sqrt{ay-x^2}$
(в первом октанте $z\geqslant 0$, а потому перед корнем удержан только знак плюс).

Определим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{ay-x^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a}{2\sqrt{ay-x^2}}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{ay-x^2}+\frac{a^2}{4(ay-x^2)}}=\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}},\quad \text{а}$$

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}}\,dx\,dy,$$

где область интегрирования (σ) ограничена осью Oy, параболой $x^2=ay$ и прямой $y=2a$. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}\sqrt{4ay+a^2}\,dy\int\limits_0^{\sqrt{ay}}\frac{dx}{\sqrt{ay-x^2}}.$$

Остальные вычисления проведите самостоятельно.

Внутренний интеграл

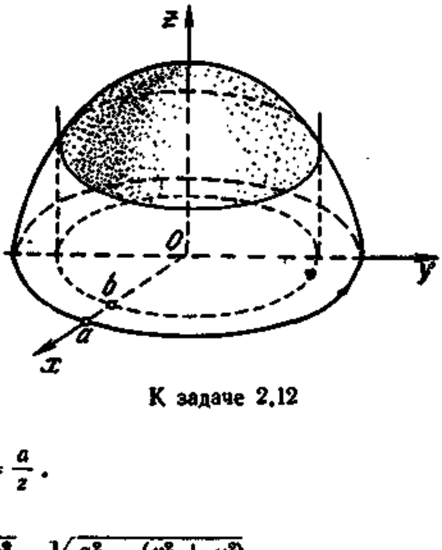
$$\int\limits_0^{\sqrt{ay}} \frac{dx}{\sqrt{ay-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{ay}} \Big|_0^{\sqrt{ay}} = \frac{\pi}{2}.$$

Сравнение первого решения со вторым показывает преимущество первого. Рекомендуется проектировать поверхность на ту из координатных плоскостей, в которой область интегрирования будет наиболее простой.

Задача 2,12 (для самостоятельного решения). Найти площадь поверхности, вырезанную цилиндром $x^2+y^2=b^2$ из сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, считая, что $a>b$.

Указание. Вычислить 1/8 часть искомой площади, расположенную в первом октанте. Проектировать вычисляемую поверхность на плоскость xOy. Проекцией будет четверть круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=b^2$. Уравнение сферы решить относительно переменной z. Вычислить

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$



К задаче 2.12

Выражение $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{z}$.

Но

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},$$

а потому

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}.$$

После перехода к полярным координатам

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}};$$

$$\frac{S}{8}=\iint\limits_{(\sigma)} \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

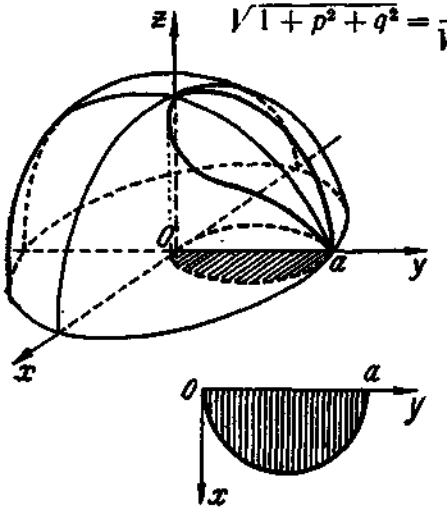
Ответ. $S=4a\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$ кв. ед.

Задача 2,13 (для самостоятельного решения). Найти площадь поверхности, вырезаемую на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ цилиндром $x^2 + y^2 - ay = 0$.

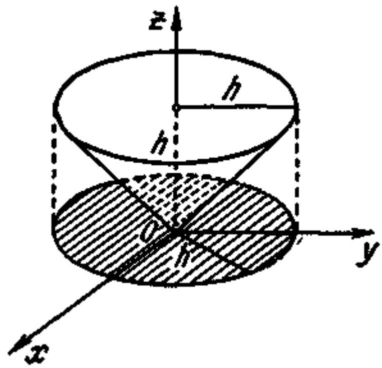
Указание. Как и в предыдущей задаче, уравнение сферы решить относительно переменной z.

После перехода к полярным координатам, как и в предыдущей задаче,

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$



К задаче 2,13



К задаче 2,14

Область интегрирования ограничена окружностью, уравнение которой

$$\rho = a \sin \varphi;$$

$$\frac{S}{4} = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\varphi = a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a \sin \varphi} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Ответ. $S = 2a^2(\pi - 2)$ кв. ед.

Задача 2,14 (для самостоятельного решения). Найти площадь боковой поверхности, ограниченной конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = h$.

Указание. Выгодно спроектировать поверхность на плоскость xOy. Проекция — круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = h^2$. Уравнение поверхности решить относительно переменной z. Воспользуемся формулой (2,5). Окажется, что

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{2},$$

а двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} \rho\, d\rho\, d\varphi$ равен площади круга, т. е. πh^2.

Ответ. $S = \pi h^2 \sqrt{2}$ кв. ед.

Задача 2,15. Вычислить площадь той части параболоида $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$, которая ограничена плоскостями

$$y = x \operatorname{tg} \alpha; \quad y = 0; \quad z = 0; \quad z = \frac{a}{2} \quad \left(a > 0; \quad \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Указание. Искомая площадь проектируется в круговой сектор с центральным углом α, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = a^2$

$$S = \frac{1}{a} \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Удобно перейти к полярным координатам.

Ответ. $$S = \frac{\alpha a^2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \text{ кв. ед.}$$

Задача 2,16 (для самостоятельного решения). Вычислить поверхность шара радиуса a.

Указание. Следует вычислить 1/8 поверхности шара, расположенную в первом октанте, в котором $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ определить z:

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = -\frac{y}{z}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{z} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Выгодно перейти к полярным координатам, учитывая, что в этих координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$. Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Восьмая часть поверхности в полярных координатах

$$\frac{S}{8}=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{A}$$

где (σ) — четверть круга, лежащая в первой четверти координатной плоскости xOy.

$$\frac{S}{8}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho$$

или

$$\frac{S}{8}=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Учесть, что

$$\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho=a\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^a=a\cdot a=a^2.$$

Ответ. $S=4\pi a^2$ кв. ед.

Для сравнения выкладок рекомендуется вычислить поверхность шара, не переходя к полярным координатам. Легко убедиться, что в этом случае вычисления окажутся более громоздкими.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Тройной интеграл.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Под областью (v), на которую распространен тройной интеграл, понимается замкнутая пространственная область, ограниченная снизу и сверху поверхностями, определяемыми соответственно уравнениями $z=\varphi_1(x, y)$ и $z=\varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1\leqslant\varphi_2)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (фиг. 3а). (В частном случае может оказаться, что образующие цилиндрической поверхности равны нулю (фиг. 3б).

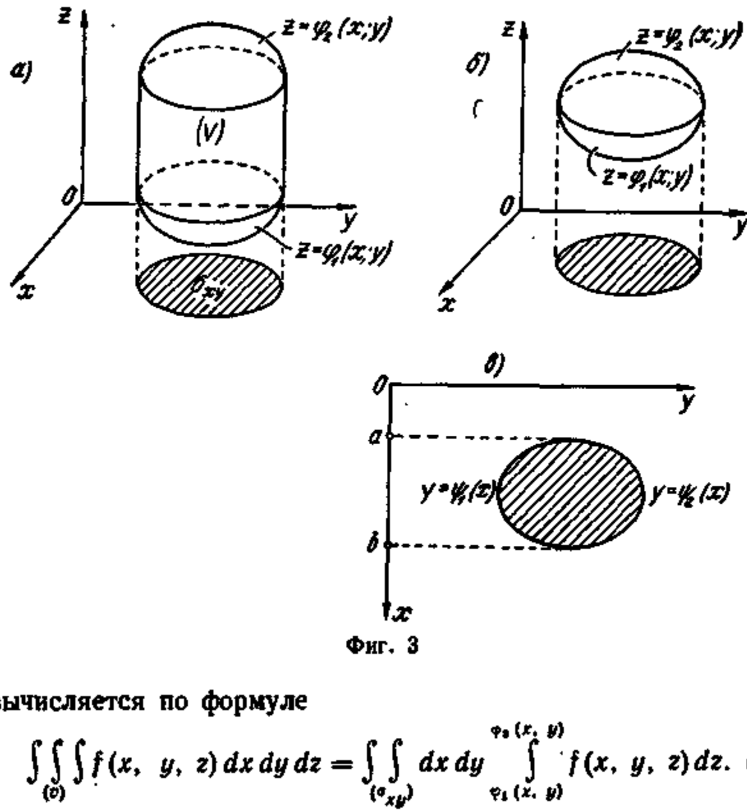
Переменные x и y изменяются в плоской области (σ_{xy}), которая является проекцией на плоскость xOy пространственной области (v).

В прямоугольных координатах элемент dv объема вычисляется по формуле

$$dv = dx\,dy\,dz. \tag{3,1}$$

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных, которая предполагается непрерывной в области (V), в прямоугольных координатах записывается так:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv = \iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$



Фиг. 3

и вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\varphi_2(x,\ y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{3,2}$$

При вычислении внутреннего интеграла

$$\int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\varphi_2(x,\ y)} f(x, y, z)\,dz$$

переменные x и y следует рассматривать как постоянные и единственной переменной величиной при этом является z. В результате получится функция двух независимых переменных x и y. Обозначим ее через $F(x, y)$. Подставив ее в правую часть формулы (3,2), мы сведем вычисление тройного интеграла к двойному интегралу

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} F(x, y)\,dx\,dy, \tag{A}$$

с вычислением которого читатель знаком из первых двух занятий.

Таким образом, вычисление тройного интеграла сведено к вычислению одномерного интеграла (внутреннего) и двойного интеграла (A).

Если область (σ_{xy}) ограничена непрерывными кривыми, определяемыми уравнениями $y = \psi_1(x)$ и $y = \psi_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то двойной интеграл (A) можно вычислить при помощи двух повторных интегрирований (фиг. 3в)

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} F(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} F(x, y)\,dy.$$

Тем самым вычисление тройного интеграла в формуле (3,2) может быть сведено к трем последовательным интегрированиям по формуле

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{3,3}$$

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен. А так как в формуле (3,3) участвуют всего три переменных x, y и z, то тройной интеграл в формуле (3,3) может быть вычислен числом способов, равным числу перестановок из трех элементов, т. е. шестью способами.

Кроме формул (3,2) и (3,3), для вычисления тройного интеграла в прямоугольных координатах часто применяется еще одна формула, которая иногда упрощает вычисления:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{(\sigma_x)} f(x, y, z)\,dy\,dz, \tag{3,4}$$

где область (σ_x) — сечение области (v) плоскостью, параллельной плоскости yOz и проходящей через произвольную точку интервала (a, b), по которому распространен внешний интеграл в формуле (3,3). (См. задачу 3,1).

Формула (3,4) получается из формулы (3,3), если в ней два последних интеграла заменить одним двойным, распространенным на область (σ_x), разъяснения о которой даны выше.

Кроме формулы (3,4), для вычисления тройного интеграла могут быть также использованы аналогичные две:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_c^d dz \iint\limits_{(\sigma_z)} f(x, y, z)\,dx\,dy \tag{3,4a}$$

и

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{e}^{f} dy \iint\limits_{(\sigma_y)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dz. \qquad (3{,}4б)$$

В формуле (3,4а) (σ_z) — область, ограниченная кривой, по которой плоскость, параллельная плоскости xOy при фиксированном z из промежутка $(c,\ d)$, пересекает область (v), а в формуле (3,4б) (σ_y) — область, ограниченная кривой, по которой плоскость, параллельная плоскости xOz при фиксированном y из промежутка $(e,\ f)$, пересекает область (v).

Заметим, что во всех этих формулах пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда величины постоянные.

Применение тройного интеграла в геометрии и механике

1. **Вычисление объема тела.** Если функция $f(x,\ y,\ z)$ тождественно равна 1, т. е. $f(x,\ y,\ z) \equiv 1$ (символ $\equiv$ есть знак тождественного равенства), то тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz \text{ превращается в } \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz,$$

который равен объему тела, ограниченного областью (v).

Итак, объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz. \qquad (3{,}5)$$

Заметим, что во многих случаях вычисление объема при помощи тройного интеграла оказывается более простым, чем его вычисление двойным интегралом.

2. **Масса неоднородного тела.** Если тело **однородно**, т. е. в каждой его точке плотность γ одна и та же, то масса M тела равна произведению плотности тела γ на его объем V

$$M = \gamma V.$$

Если же тело *неоднородно*, то плотность его в различных точках различна и меняется от точки к точке, являясь, таким образом, функцией координат точки, т. е. функцией трех независимых переменных.

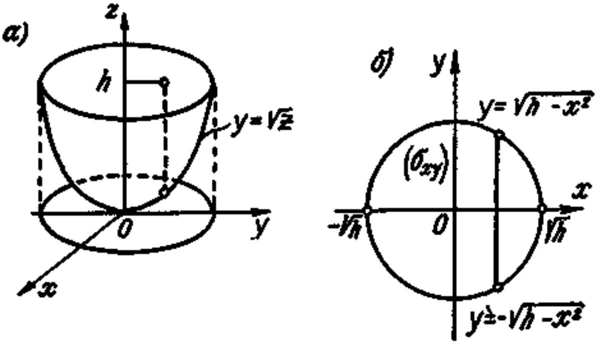
Таким образом, плотность $\gamma = \gamma(x,\ y,\ z)$, причем эта функция предполагается непрерывной.

Масса M тела в этом случае равна тройному интегралу от плотности $\gamma(x,\ y,\ z)$, распространенному на объем (V), занимаемый этим телом, и определяется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(v)} \gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (3{,}6)$$

Различие между тройным интегралом в формулах (3,2) и (3,6) состоит только в том, что в формуле (3,6) вместо функции $f(x,\ y,\ z)$ фигурирует функция $\gamma(x,\ y,\ z)$. Ясно, что интеграл (3,6) вычисляется по тем же формулам, что и интеграл (3,2). Другие приложения тройного интеграла в механике рассматриваются на следующем практическом занятии.

Цель этого практического занятия — приобретение техники вычисления тройных интегралов и определение с их помощью массы и объемов тел. Основной трудностью, с которой сталкиваются в применении тройных интегралов, является определение пределов в трех одномерных интегралах в правой части формулы (3,3). Само же вычисление этих интегралов не должно вызвать, собственно, никаких затруднений.



К задаче 3,1

Задача 3,1. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{(v)} z^2 dx\,dy\,dz,$$

где (v) — тело, ограниченное поверхностью, образованной вращением кривой $y = \sqrt{z}$ вокруг оси Oz и плоскостью $z = h\,(h > 0)$.

Решение. Определим уравнение поверхности вращения (см., например, двадцатое практическое занятие в книге И. А. Каплан. Практические занятия по высшей математике, ч. I. Изд-во ХГУ, 1961).

В уравнении вращающейся линии $y = \sqrt{z}$ переменную z, одноименную с осью вращения Oz, оставляем без изменения, а переменную y заменяем на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Заменяя этим корнем y в уравнении $y = \sqrt{z}$, получаем уравнение поверхности вращения $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$ или $x^2 + y^2 = z$ (параболоид вращения).

Область интегрирования (v) ограничена этой поверхностью и плоскостью $z = h\,(h > 0)$. Проекцией поверхности на плоскость xOy является круг. Уравнение окружности (l), ограничивающей этот круг, получим, исключая z из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=z \\ z&=h \end{aligned}\right\}.$$

Уравнение окружности (l): $x^2+y^2=h$. Ее радиус $R=\sqrt{h}$. В области интегрирования (v) переменная z изменяется от ее значения $z=x^2+y^2$ на поверхности параболоида, который снизу ограничивает область (v), до значения $z=h$ на плоскости, ограничивающей эту область сверху, т. е.

$$x^2+y^2 \leqslant z \leqslant h$$

(см. фигуру *а*) на чертеже к этой задаче).

В области (σ_{xy}) переменная y изменяется от ее значения $y=-\sqrt{h-x^2}$ на нижней части окружности, ограничивающей область (σ_{xy}), до значения $y=+\sqrt{h-x^2}$ на верхней части этой окружности, т. е.

$$-\sqrt{h-x^2} \leqslant y \leqslant +\sqrt{h-x^2}.$$

Переменная же x в области (σ_{xy}) изменяется от $-\sqrt{h}$ до $+\sqrt{h}$: $-\sqrt{h} \leqslant x \leqslant +\sqrt{h}$ (см. фигуру *б*) на чертеже к этой задаче).

Формула (3,3) теперь перепишется так:

$$I=\iiint\limits_{(v)} z^2 dx\,dy\,dz=\int\limits_{-\sqrt{h}}^{+\sqrt{h}} dx \int\limits_{-\sqrt{h-x^2}}^{+\sqrt{h-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{h} z^2 dz.$$

Вычисление трех одномерных интегралов в этой формуле приведет к достаточно громоздким выкладкам. (Рекомендуется убедиться в этом самостоятельно).

Попытаемся вычислить этот интеграл другим путем, минуя применение формулы (3,3). Распишем вычисляемый интеграл так:

$$I=\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{x^2+y^2}^{h} z^2\,dz.$$

Это выгодно потому, что в двойном интеграле $\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy$ областью интегрирования является круг (применена формула (3,2)).

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{x^2+y^2}^{h} z^2\,dz=\left.\frac{z^3}{3}\right|_{x^2+y^2}^{h}=\frac{1}{3}\left[h^3-(x^2+y^2)^3\right].$$

Поэтому

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\left[h^3-(x^2+y^2)^3\right]dx\,dy.$$

Учитывая наличие в подынтегральной функции выражения x^2+y^2, а также то, что область (σ_{xy}) — круг, при вычислении этого интеграла выгодно перейти к полярным координатам, в которых $x^2+y^2=\rho^2$, а элемент площади равен $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Поэтому

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(h^3-\rho^6)\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{h}}(h^3-\rho^6)\,\rho\,d\rho.$$

Переменная ρ при постоянном φ изменяется от 0 до $\sqrt{h}$, а переменная φ — от 0 до 2π.

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\sqrt{h}}(h^3-\rho^6)\,\rho\,d\rho=\left(\frac{h^3\rho^2}{2}-\frac{\rho^8}{8}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{h}}=\frac{h^4}{2}-\frac{h^4}{8}=\frac{3}{8}h^4.$$

Окончательно

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3}{8}h^4\,d\varphi=\frac{1}{8}h^4\,2\pi;$$

$$I=\frac{1}{4}\pi h^4.$$

Однако и это решение можно упростить. Перепишем интеграл в таком виде (формула (3,4а)):

$$I=\iiint\limits_{(v)}z^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^h z^2\,dz\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy, \qquad (A)$$

где (σ_z) есть сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Oz, лежащей на высоте z, причем $0<z<h$. Это сечение является кругом, радиус которого R равен $\sqrt{z}$, как это следует из уравнения поверхности $x^2+y^2=z$. (Радиусом круга является ордината y при $x=0$).

Внутренний интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy$ в (A) равен площади этого круга, а потому

$$\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy=\pi(\sqrt{z})^2=\pi z.$$

Подставляя это значение в (A), получим

$$I=\int\limits_0^h z^2\pi z\,dz=\pi\int\limits_0^h z^3\,dz=\left(\pi\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^h=\frac{\pi h^4}{4}.$$

Совершенно очевидно, что вычисление заданного интеграла этим приемом оказалось несравненно более простым, чем предыдущими двумя. Таким образом, эта задача на вычисление тройного интеграла показывает, что не всегда для его вычисления следует пользоваться основной формулой (3,3), а полезно поискать более простые пути.

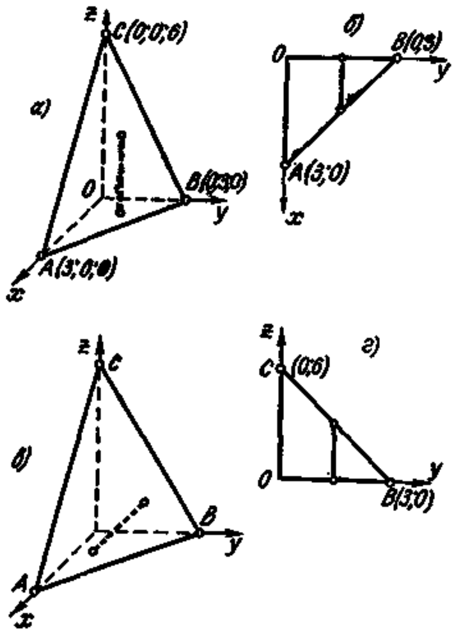
Задача 3,2 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz$, где (v) — область, ограниченная плоскостями $z = 0$ и $z = h$ и поверхностью, образованной вращением кривой $y = z^2$ вокруг оси Oz.

Ответ. $\frac{\pi h^5}{5}$.

Задача 3,3. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(v)} x\,dx\,dy\,dz$, где (v) — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью

$$2x + 2y + z - 6 = 0. \qquad (A)$$

Решение. Тетраэдр ограничен снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$, на которой $z = 6 - 2x - 2y$. Поэтому в области интегрирования (v) переменная z изменяется от $z = 0$ до $z = 6 - 2x - 2y$ (см. фигуру *а*) на чертеже к этой задаче).



К задаче 3,3

Проекцией области (v) на плоскость xOy является треугольник OAB. Уравнение прямой AB получим, решая совместно уравнение плоскости (A) и плоскости $z = 0$.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + z - 6 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда уравнение прямой AB будет $2x + 2y - 6 = 0$ или $x + y - 3 = 0$.

В области (σ_{xy}) переменная y при постоянном x изменяется от ее значения на оси Oy, т. е. от $x = 0$ до ее значения на прямой AB, т. е. до $y = 3 - x$.

Итак,

$$0 \leq y \leq 3 - x$$

(фигура *б*) на чертеже к этой задаче). Переменная же x в этой области изменяется от 0 до 3:

$$0 \leq x \leq 3$$

(фигура *б*) на чертеже к этой задаче).

Поэтому

$$I=\iiint\limits_{(v)} x\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_0^{3-x} dy\int\limits_0^{6-2x-2y} dz.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{6-2x-2y} dz=(z)\Big|_0^{6-2x-2y}=6-2x-2y.$$

Следовательно,

$$I=\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy.$$

Теперь внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy=(6y-2xy-y^2)\Big|_0^{3-x}=$$
$$=6(3-x)-2x(3-x)-(3-x)^2=9-6x+x^2.$$

Поэтому

$$I=\int\limits_0^3 x(9-6x+x^2)\,dx.$$

Ответ. $I=\frac{27}{4}$.

Эту же задачу рекомендуем решить, меняя порядок интегрирования. Область (v) спроектировать на плоскость yOz, провести первую интеграцию по x, вторую — по z, третью — по y (фиг. *в)* и *г)* на чертеже к этой задаче).

Указание.

$$I=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{2(3-y)} dz\int\limits_0^{\frac{6-2y-z}{2}} x\,dx.$$

Задача 3,4. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностью трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если в каждой точке тела плотность равна квадрату ее расстояния от начала координат.

Решение. Квадрат расстояния точки тела от начала координат равен сумме квадратов координат этой точки. Поэтому плотность в каждой точке тела $\gamma(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$, а масса тела

$$M=\iiint\limits_{(v)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \tag{A}$$

[см. формулу (3,6)].

Представим интеграл в (А) в виде суммы трех интегралов

$$M = \iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{(v)} y^2\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz.$$

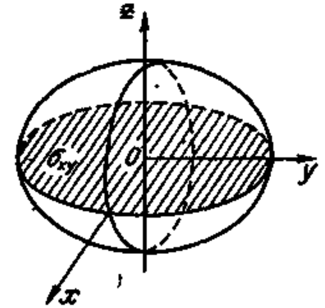
Вычислим эти интегралы по формуле (3,3).

Первый интеграл

$$I_1 = \iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz.$$

Определим пределы интегрирования по каждой переменной. Чтобы определить пределы интегрирования по z, решим уравнение эллипсоида относительно переменной z:

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$



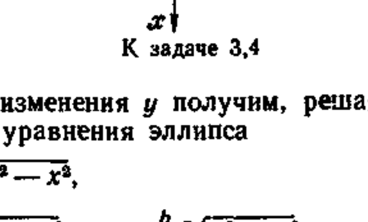
Уравнение той части эллипсоида, которая находится под плоскостью xOy, т. е. его нижней части

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

а уравнение той его части, которая находится над плоскостью xOy, т. е. его верхней части

$$z = +c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Спроектируем поверхность эллипсоида на плоскость xOy. Проекцией будет эллипс, уравнение которого мы получим из уравнения эллипсоида, полагая в нем $z = 0$. Уравнение этого эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



К задаче 3,4

При фиксированном x пределы изменения y получим, решая это уравнение относительно y. Из уравнения эллипса

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

а потому y изменяется от $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ до $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Переменная же x в этом эллипсе изменяется от $-a$ до $+a$ (см. чертеж). Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-a}^{+a} x^2\,dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz.$$

Выполним три последовательных интегрирования:

$$1)\quad \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

2) Подставим найденное значение под знак второго интеграла и получим

$$\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy. \qquad (A)$$

В этом интеграле переменной интегрирования является y, а переменная x должна рассматриваться как величина постоянная. Удобно ввести такую замену

$$1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{d^2}{b^2}, \qquad (B)$$

откуда

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=d^2,$$

а

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=d. \qquad (C)$$

Подкоренное выражение, стоящее под знаком интеграла (A), с учетом выражения (B) преобразуется так:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{d^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{1}{b}\sqrt{d^2-y^2}.$$

На основании соотношения (C) пределами интегрирования в (A) будут $-d$ и $+d$. Учитывая, что под интегралом находится четная функция, а также все вышеуказанные замены, интеграл (A) может быть переписан так:

$$\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{2c\cdot 2}{b}\int\limits_0^d\sqrt{d^2-y^2}\,dy=$$

$$=\frac{4c}{b}\left(\frac{y}{2}\sqrt{d^2-y^2}+\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{y}{d}\right)\Bigg|_0^d=\frac{4c}{b}\cdot\frac{d^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

На основании (C)

$$d^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

а интеграл в (A) равен

$$\frac{\pi c}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

3) Подставляя это значение в исходный интеграл I_1, получим

$$I_1=\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-a}^{a} x^2\cdot\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int\limits_{0}^{a}(a^2x^2-x^4)\,dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{a^2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^a=$$

Учтено, что подынтегральная функция — чётная

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)=\frac{2\pi bc}{a^2}\cdot\frac{2a^5}{15}=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Итак, окончательно

$$\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Остальные два интеграла следует вычислить самостоятельно. Однако не имеет смысла оставлять тот же порядок интегрирования.

При вычислении второго тройного интеграла интегрирование по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащему в плоскости xOy, выполнить сначала по x, а третье, последнее интегрирование — по y. Пределами изменения x при постоянном фиксированном y будут

$$-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\ \text{и}\ +\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},$$

а пределами изменения y будут $-b$ и $+b$.

Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} y^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-b}^{+b}y^2\,dy\int\limits_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dx\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz.$$

В результате получится число $\frac{4}{15}\pi ab^3c$.

При вычислении третьего интеграла также следует изменить порядок интегрирования. Уравнение поверхности эллипсоида рационально решить относительно переменной y. Окажется, что $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}$.

Эллипсоид спроектировать на плоскость xOz. В проекции получится эллипс, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

На этом эллипсе при постоянном z переменная x изменяется от значения $x=-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$ до значения $x=+\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$, а переменная z от $-c$ до $+c$.

Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz\int\limits_{-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}} dx\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} dy.$$

Должно получиться число $\frac{4}{15}\pi abc^3$.

Таким образом, масса тела

$$M=\frac{4}{15}\pi a^3bc+\frac{4}{15}\pi ab^3c+\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

Окончательно

$$M=\frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+b^2+c^2).$$

Заметим, что, если бы мы при вычислении второго и третьего интегралов не изменяли порядка интегрирования, то, как легко убедиться, выкладки значительно усложнились бы. Рекомендуется это проверить.

Теперь покажем, как можно эту задачу решить значительно проще, минуя формулу (3,3), а применяя формулы (3,4), (3,4*а*) и (3,4*б*).

Вычислим для примера третий интеграл

$$I_3=\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz$$

и по формуле (3,4а) перепишем его так:

$$I_3=\int\limits_{-c}^{c} dz\iint\limits_{(\sigma_z)} z^2\,dx\,dy=\int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy,$$

где пределы во внешнем интеграле очевидны из уравнения эллипсоида, а (σ_z) (см. пояснения к формуле (3,4а)) — область, ограниченная эллипсом, по которому плоскость, параллельная плоскости xOy, при постоянном z из интервала $(-c, +c)$ пересекает эллипсоид. Интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ равен площади этого сечения, определим полуоси эллипса, получающегося в сечении. Из уравнения эллипсоида, считая, что z — величина постоянная, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1.$$

Полуоси этого эллипса равны:

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}};\quad b_1=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

а его площадь

$$\pi a_1b_1=\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Поэтому двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

а

$$I_z=\int\limits_{-c}^{c} z^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\int\limits_0^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=$$

$$=2\pi ab\int\limits_0^c\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5c^2}\right)\Bigg|_0^c=$$

$$=2\pi ab\left(\frac{c^3}{3}-\frac{c^3}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

Так же вычисляются и другие два интеграла. Вычисление должно быть выполнено самостоятельно. Читатель, конечно, отдаст предпочтение этому способу решения, на котором он убедился, что не всегда самым простым является механическое применение основных формул.

Задача 3,5 (для самостоятельного решения). Определить массу материального круглого конуса, высота которого равна h, а угол между его осью и образующими равен α, если известно, что плотность в каждой точке пропорциональна n-ой степени расстояния этой точки от плоскости, проведенной через вершину конуса параллельно основанию.

Указание. За ось конуса принять ось Oz (см. чертеж к задаче). Найти уравнение поверхности конуса как поверхности, образованной вращением прямой OC вокруг оси Oz.

Прямая OC определяется уравнением

$$y = az. \qquad (a = \operatorname{tg}\alpha) \qquad \text{(A)}$$

Уравнение поверхности конуса

$$\sqrt{x^2 + y^2} = az;$$
$$x^2 + y^2 = a^2z^2.$$

Плотность $\rho = kz^n$, где k — коэффициент пропорциональности

$$M = \iiint\limits_{(v)} kz^n\,dx\,dy\,dz,$$

(v) — указанный конус.

Для вычисления интеграла применить формулу (3,4а)

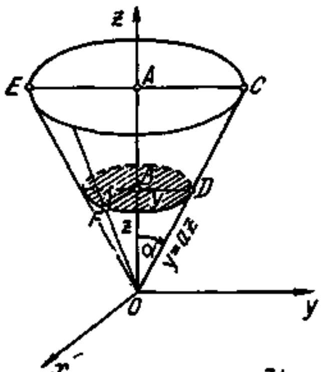
$$M = k\int_0^h dz \iint\limits_{(\sigma_z)} z^n\,dx\,dy =$$

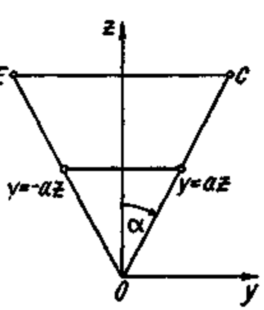
$$= k\int_0^h z^n dz \iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy, \quad \text{(A)}$$

где (σ_z) — сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости xOy и проходящей через произвольную точку z интервала $(0, h)$. Учесть, что $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ равен площади этого сечения, т. е. площади круга, радиус которого $BD = y = az$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy = \pi a^2z^2.$$





К задаче 3,5

Подставляя это значение в (А), получим

$$M = k\int_0^h z^n\pi a^2z^2dz.$$

Окончательно

$$M = \frac{k\pi a^2h^{n+3}}{n+3}.$$

Уместно сравнить это очень простое решение с вычислением исходного интеграла по общей формуле (3,3), в которой внутреннее интегрирование выполним по переменной x, а поверхность конуса спроектируем на плоскость yOz. Проекцией окажется треугольник OCE.

$$M = \iiint\limits_{(v)} kz^n\,dx\,dy\,dz = k\int\limits_0^h z^n\,dz \int\limits_{-az}^{az} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2z^2-y^2}} dx. \qquad \text{(C)}$$

Пределы интегрирования по x определены так: уравнение поверхности конуса решаем относительно переменной x. Окажется, что $x = \pm\sqrt{a^2z^2 - y^2}$.

На поверхности конуса x изменяется от значения $x = -\sqrt{a^2z^2-y^2}$ на «тыловой» части конуса до значения $x = +\sqrt{a^2z^2-y^2}$ на его передней части.

Переменная y изменяется от ее значения $y = -az$ на прямой OE до значения $y = az$ на прямой OC при фиксированном z, а переменная z от 0 до h.

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{-\sqrt{a^2z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2z^2-y^2}} dx = 2\sqrt{a^2z^2-y^2}.$$

Интеграл $2\int\limits_{-az}^{az}\sqrt{a^2z^2-y^2}\,dy$ удобно вычислить подстановкой $y = az\sin\varphi$, имея в виду, что при вычислении этого интеграла z следует считать величиной постоянной. Новыми пределами интегрирования будут $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Интеграл преобразуется к интегралу

$$2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2z^2\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi a^2z^2.$$

Подставляя это значение в правую часть формулы (C), получим, конечно, прежний ответ. А теперь сравните, насколько этот путь оказался сложнее.

Задача 3,6 (для самостоятельного решения). Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} xyz\,dx\,dy\,dz,$$

где (v) — тело, ограниченное поверхностями: 1) $y = x^2$; 2) $x = y^2$; 3) $z = xy$ и 4) $z = 0$.

Указание.

$$I = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy \int\limits_0^{xy} z\,dz$$

Ответ. $\frac{1}{96}$.

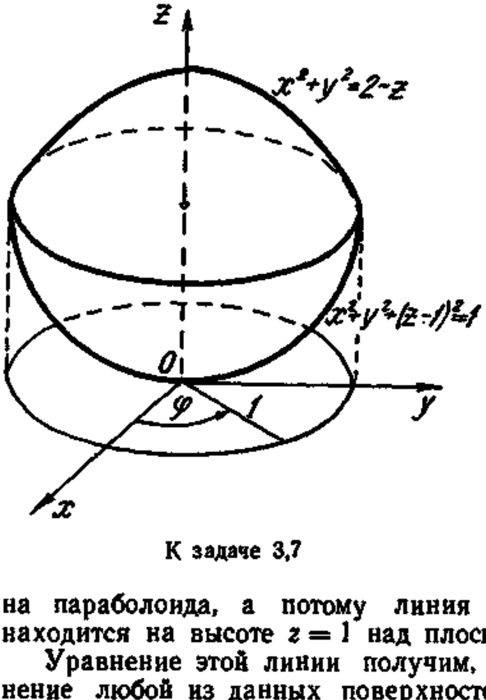
Задача 3,7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и $x^2+y^2=2-z$.

Решение. Первая поверхность — сфера, вторая — параболоид вращения (см. чертеж).

Уравнение сферы преобразуем к виду

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1. \tag{A}$$

Из этого уравнения видно, что центр сферы находится на оси Oz в точке $(0, 0, 1)$, а ее радиус равен 1.



К задаче 3,7

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Очевидно, что линией пересечения является окружность. Прежде всего определим, на какой высоте z над плоскостью xOy расположена эта линия.

Подставляя значение x^2+y^2 из второго уравнения в первое, получим уравнение для определения z:

$$(2-z)+z^2-2z=0$$

или

$$z^2-3z+2=0.$$

Решая его, получим, что $z_1=1$; $z_2=2$. Точка, в которой $z=2$, — вершина параболоида, а потому линия пересечения поверхностей находится на высоте $z=1$ над плоскостью xOy.

Уравнение этой линии получим, подставляя $z=1$ в уравнение любой из данных поверхностей. Подставляя, например, $z=1$ во второе уравнение, получим уравнение линии пересечения:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1 \\ z&=1 \end{aligned}\right\}.$$

Эта окружность без искажения проектируется на плоскость xOy в окружность $x^2+y^2=1$, а все тело проектируется в круг, ограниченный этой окружностью.

По формуле (3,5) объем тела

$$V=\iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz. \tag{B}$$

Первое интегрирование будем вести по переменной z. Определим пределы изменения этой переменной в области интегрирования. При фиксированных x и y из уравнения (A) сферы

$$z-1=\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

а

$$z=1\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}.$$

На нижней полусфере $z=1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$,
а из уравнения параболоида $z=2-(x^2+y^2)$.

Таким образом, в области интегрирования z изменяется от $1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ до $2-(x^2+y^2)$.

Поэтому формула (B) может быть переписана так:

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz\,, \tag{C}$$

где (σ_{xy}) — круг радиуса, равного 1, лежащий в плоскости xOy. Учитывая, что внутренний интеграл

$$\int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz=2-(x^2+y^2)-1+\sqrt{1-(x^2+y^2)}=$$

$$=1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

формула (C) перепишется так:

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}[1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)}]\,dx\,dy.$$

Поскольку под знаком интеграла имеется выражение x^2+y^2, а область интегрирования — круг, удобно перейти к полярным координатам, в которых $x^2+y^2=\rho^2$, а элемент площади $dx\,dy$ следует заменить на $\rho\,d\rho\,d\varphi$.
Поэтому

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Так как в круге (σ_{xy}) ρ изменяется от 0 до 1, а φ от 0 до 2π, то

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^1(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho=\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{1}{2}\,\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12},$$

а

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{7}{12}\,d\varphi = 2\pi\cdot\frac{7}{12} = \frac{7}{6}\pi \text{ куб. ед.}$$

Окончательно

$$V = \frac{7}{6}\pi \text{ куб. ед.}$$

Укажем и другой путь решения задачи: запишем формулу для вычисления объема в виде

$$V = \iiint\limits_{(v_1)} dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{(v_2)} dx\,dy\,dz,$$

где (v_1) — область, ограниченная сферой и плоскостью $z = 1$, а (v_2) — область, ограниченная этой же плоскостью и поверхностью параболоида.

$I_1 = \iiint\limits_{(v_1)} dx\,dy\,dz$ равен объему полушара с радиусом, равным 1, т. е. $\frac{2}{3}\pi$ куб. ед.

Второй интеграл запишем так:

$$I_2 = \iiint\limits_{(v_2)} dx\,dy\,dz = \int_1^2 dz \iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy, \qquad \text{(Д)}$$

где (σ_z) — круг, ограниченный окружностью, по которой плоскость, параллельная плоскости xOy, при фиксированном z из промежутка $(1;\ 2)$ $(1 < z < 2)$ пересекает параболоид. (Контур круга (l) — окружность, так как параболоид — параболоид вращения).

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ равен площади круга (σ_z). Радиус этого круга получим из уравнения параболоида $x^2 + y^2 = 2 - z$, взяв в нем $x = 0$, полагая, что радиус лежит в плоскости yOz, а z будем считать величиной фиксированной.

Радиус этого круга y получим из уравнения

$$y^2 = 2 - z; \quad y = \sqrt{2 - z}.$$

Площадь же круга равна πy^2, т. е. $\pi(2 - z)$.

Итак,

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy = \pi(2 - z).$$

Поэтому

$$I_2 = \pi\int_1^2 (2 - z)\,dz = \pi\left(2z - \frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ куб. ед.}$$

Складывая эти два объема, получим

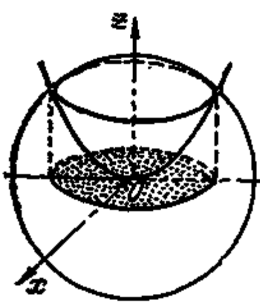
$$V = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi \text{ куб. ед.},$$

т. е. то, что и раньше, но значительно проще.

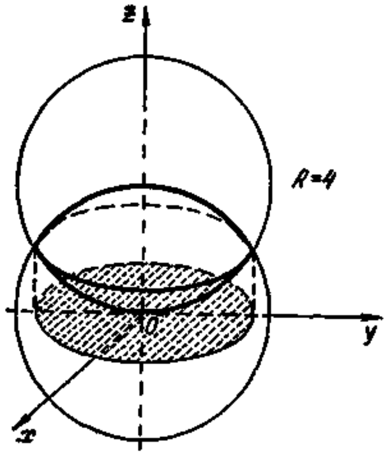
Задача 3,8 (для самостоятельного решения). Найти объем, ограниченный поверхностями $4z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Ответ. $V = \frac{8}{3}\pi(6\sqrt{3} - 5)$ куб. ед.

Рекомендуется провести решение двумя способами, как это сделано в предыдущей задаче.



К задаче 3,8



К задаче 3.9

Задача 3,9 (для самостоятельного решения). Найти объем, ограниченный сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.

Указание.

$$V = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\, dy \int\limits_{4-\sqrt{16-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} dz,$$

а (σ_{xy}) — круг, в который проектируется тело на плоскость xOy. Уравнение окружности этого круга $x^2 + y^2 = 12$.

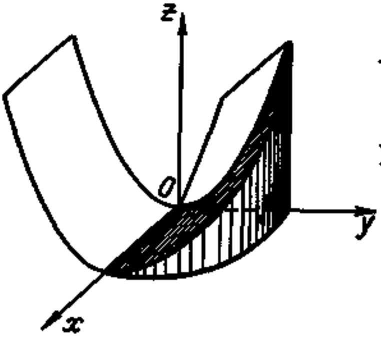
При вычислении двойного интеграла по области (σ_{xy}) удобно перейти к полярным координатам. Должно получиться

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{3}} (2\sqrt{16 - \rho^2} - 4)\, \rho\, d\rho.$$

Ответ. $\frac{80}{3}\pi$ куб. ед.

Задача 3,10 (для самостоятельного решения). Определить объем тела, ограниченного поверхностями: $y^2 = pz$ $(p > 0)$, $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскостью xOy.

Указание. В первом октанте находится четверть тела



К задаче 3,10

$$\frac{v}{4} = \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\frac{y^2}{p}} dz. \qquad (A)$$

Решение провести также и по формуле

$$\frac{v}{4} = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_0^{\frac{y^2}{p}} dz,$$

где (σ_{xy}) — четверть круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = a^2$. Вычисление окажется значительно проще. При вычислении по формуле (А) встретится интеграл

$$\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Его удобно вычислить подстановкой $x = a \sin\varphi$. Это приведет к интегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi$, который легко может быть вычислен (можно воспользоваться и справочником).

Ответ. $V = \frac{\pi a^4}{4p}$ куб. ед.

Тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах

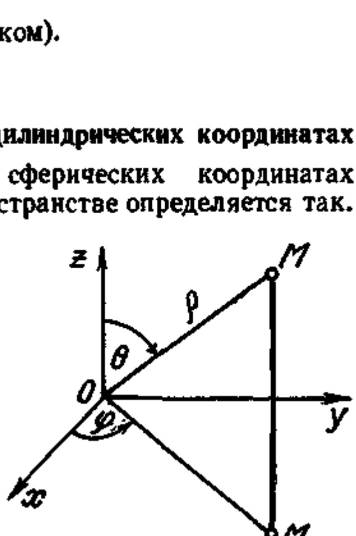
1. Сферические координаты. В сферических координатах (фиг. 3,2) положение точки M в пространстве определяется так.

1) Задается расстояние этой точки от начала координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (3,7)$$

причем $\rho \geqslant 0$.

2) Точка M проектируется на плоскость xOy в точку M_1. Угол φ, составленный OM_1 и осью Ox, является второй сферической координатой точки M. Этот угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки и может изменяться от 0 до 2π $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.



Фиг. 3,2

В географических координатах этот угол определяет долготу точки на поверхности земли, если за начальный меридиан принята плоскость xOz.

3) Третьей сферической координатой точки M является угол θ между осью Oz и отрезком OM. Этот угол отсчитывается от оси Oz в направлении, указанном на фиг. 3,2 стрелкой. Угол θ может изменяться от 0 до π: $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

В географических координатах этому углу соответствует дополнение широты точки M до 90°. Это так называемое полярное расстояние точки M.

Таким образом, сферическими координатами точки являются ρ, φ и θ.

2. Формулы, связывающие прямоугольные координаты точки и ее сферические координаты.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}\right\}. \tag{3,8}$$

Легко проверить, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2. \tag{3,9}$$

Это также следует из формулы (3,7). (Сферические координаты точки иногда называются полярными координатами в пространстве).

3. Цилиндрические координаты. В цилиндрических координатах положение точки M в пространстве определяется так.

Точка M проектируется на плоскость xOy и определяются ее полярные координаты ρ и φ. Это первые две цилиндрические координаты.

Третьей цилиндрической координатой является расстояние точки от плоскости xOy, т. е. ее аппликата (иначе ее прямоугольная координата z).

Таким образом, цилиндрическими координатами точки являются ρ, φ и z (фиг. 3,3). Область изменения цилиндрических координат указывается неравенствами

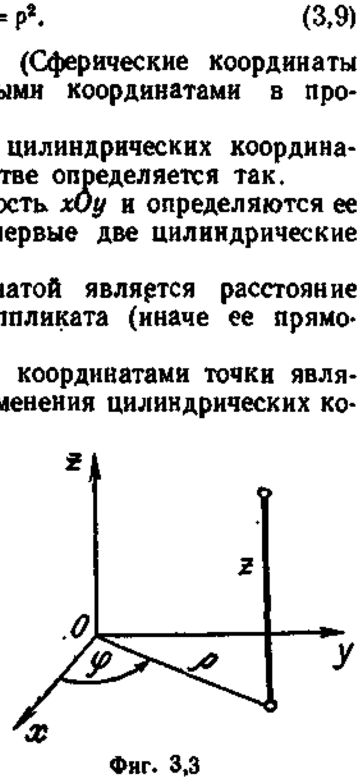
$\rho > 0$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

4. Формулы, связывающие прямоугольные и цилиндрические координаты точки.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\}. \tag{3,10}$$

5. В сферических координатах элемент объема.

$$dv = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi. \tag{3,11}$$



Фиг. 3,3

6. В цилиндрических координатах элемент объема

$$dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \tag{3,12}$$

7. Правила для вычисления тройного интеграла в сферических и цилиндрических координатах:

а) для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ преобразовать к сферическим координатам, надо x, y и z в подынтегральной функции заменить по формулам (3,8), а элемент объема $dx\, dy\, dz$ — по формуле (3,11). После этого вычислить его тремя последовательными интегрированиями по переменным ρ, θ и φ. (Порядок интегрирования безразличен). Заметим, что переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар;

б) для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ преобразовать к цилиндрическим координатам, надо x, y и z в подынтегральной функции заменить по формулам (3,10), а элемент объема $dx\, dy\, dz$ — по формуле (3,12). После этого тройной интеграл вычислить тремя последовательными интегрированиями.

8. Формулы для вычисления объема в сферических и цилиндрических координатах.

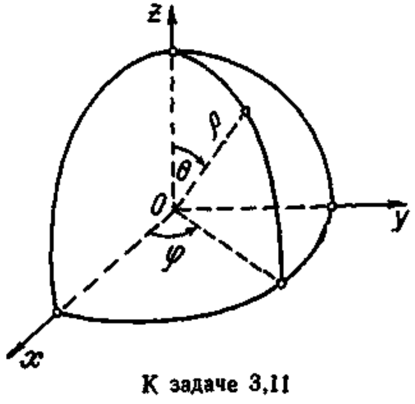
а) В сферических координатах объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \tag{3,13}$$

б) В цилиндрических координатах объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \tag{3,14}$$

Задача 3.11. Определить объем шара радиуса R.



К задаче 3,11

Решение. Будем вести вычисление в сферической системе координат. Центр шара поместим в начало координат. В прямоугольной системе координат уравнение поверхности этого шара, т. е. сферы, записывается так:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Заменяя $x^2 + y^2 + z^2$ через ρ^2 по формуле (3,9), получим уравнение поверхности шара $\rho^2 = R^2$ или $\rho = R$.

Вычислим объем той части шара, которая находится в первом октанте

$$\frac{V}{8}=\iiint\limits_{(v)}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^R\rho^2\,d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^R\rho^2\,d\rho=\frac{R^3}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{V}{8}=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta.$$

Но

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=1.$$

Значит,

$$\frac{V}{8}=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{R^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi R^3}{6}.$$

Окончательно объем шара

$$V=\frac{8}{6}\pi R^3;$$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ куб. ед.}$$

Эта формула хорошо известна из элементарной геометрии, но получена она с помощью тройного интеграла в сферических координатах исключительно просто.

Задача 3,12. Вычислить объем тела, ограниченного сферой радиуса a и поверхностью вписанного конуса с углом 2α при вершине.

К задаче 3,12

Решение. Поместим начало координат в вершину конуса, а центр сферы на ось Oz в точку с координатами $(0, 0, a)$. Уравнение поверхности сферы в прямоугольных координатах запишется так:

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2. \qquad (A)$$

Преобразуем это уравнение к сферическим координатам по формулам (3,8). Подставляя в уравнение (A) значения x, y и z, из этих формул получим

$$\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + (\rho\cos\theta - a)^2 = a^2$$

или

$$\rho^2 \sin^2\theta \, (\overbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}^{1}) + \rho^2\cos^2\theta - 2a\rho\cos\theta + a^2 = a^2.$$

После упрощения

$$\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = 2a\rho\cos\theta;$$
$$\rho^2(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1}) = 2a\rho\cos\theta.$$

Сокращая на ρ, получаем уравнение (A) в сферических координатах

$$\rho = 2a\cos\theta.$$

Это же уравнение можно было получить и проще: из чертежа а) к этой задаче видно, что в любой точке сферы $\rho = 2a\cos\theta$, так как в треугольнике OAB угол B — прямой как опирающийся на диаметр OA.

Переменные ρ, θ и φ меняются в таких пределах:

1) ρ изменяется от 0 до $2a\cos\theta$ — значения ρ на поверхности сферы;

2) θ изменяется от 0 до α;

3) φ изменяется от 0 до 2π.

Поэтому на основании формулы (3,14)

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\cdot 8a^3\cos^3\theta.$$

Подставляя это выражение под знак второго интеграла, получим

$$\frac{8}{3}a^3\int\limits_0^\alpha \cos^3\theta\sin\theta d\theta = -\frac{8}{3}a^3\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^\alpha = -\frac{2}{3}a^3(\cos^4\alpha - 1) =$$

$$= \frac{2}{3}a^3(1-\cos^4\alpha).$$

Подставляя это выражение под знак «внешнего» интеграла, получим

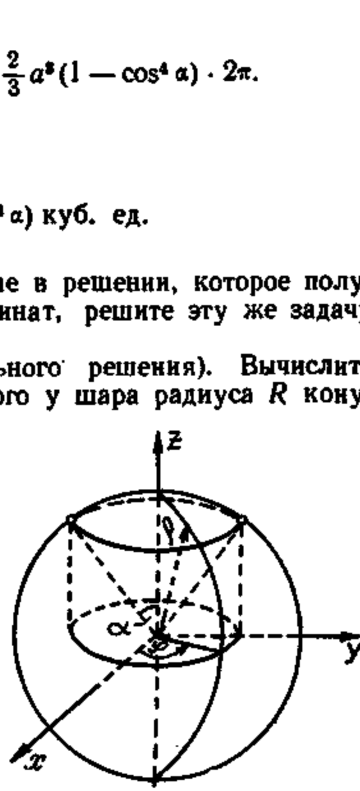
$$V = \int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}a^3(1-\cos^4\alpha)\,d\varphi = \frac{2}{3}a^3(1-\cos^4\alpha)\cdot 2\pi.$$

Окончательно

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\alpha) \text{ куб. ед.}$$

Для того, чтобы ощутить упрощение в решении, которое получено введением сферических координат, решите эту же задачу в прямоугольных координатах.

Задача 3,13 (для самостоятельного решения). Вычислить объем шарового сектора, вырезанного у шара радиуса R конусом, вершина которого находится в центре шара, а образующие наклонены к оси Oz под углом α.



К задаче 3,13

Указания. 1. Поместить вершину конуса, а тем самым и центр шара в начало координат. Так как поверхность, ограничивающая тело, — шар, то выгодно провести решение в сферических координатах. В отличие от предыдущей задачи, поскольку центр шара находится в начале координат, уравнение его поверхности будет $\rho = R$.

2. Переменные ρ, θ и φ в объеме (V) меняются в таких пределах:

а) переменная ρ от 0 до ее значения R на поверхности шара;

б) переменная θ от 0 до α;

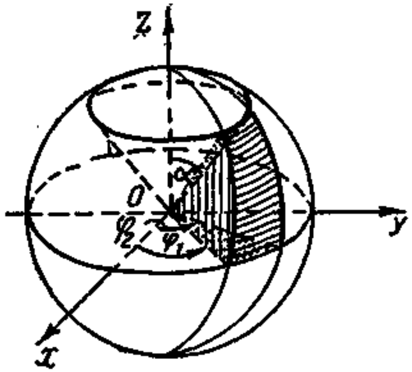
в) переменная φ от 0 до 2π.

Ответ. $V = \frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}$ куб. ед.

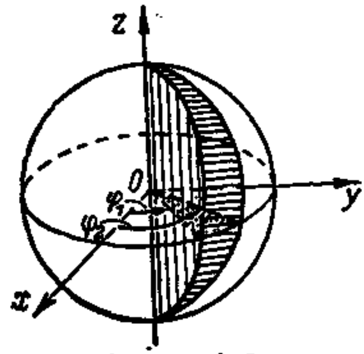
Задача 3,14 (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) сферой радиуса a; 2) конусом с вершиной в центре сферы и образующими, наклоненными к оси Oz под углом α; 3) двумя плоскостями, проходящими через ось Oz и составляющими с плоскостью xOz углы φ_1 и φ_2, причем $\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$; 4) плоскостью xOy.

Указания.

1. Решение провести в сферических координатах. Уравнение поверхности сферы $\rho = a$;



К задаче 3.14



К задаче 3,15

2. В объеме (V) переменные ρ, θ и φ меняются в таких пределах:

а) ρ от 0 до a;

б) θ от α до $\frac{\pi}{2}$;

в) φ от φ_1 до φ_2.

3. $V = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_{0}^{a} \rho^2 d\rho.$

Ответ. $V = \frac{a^3}{3}(\varphi_2 - \varphi_1)\cos\alpha$ куб. ед.

Задача 3,15 (для самостоятельного решения). Найти объем части шара радиуса R, заключенной между двумя меридианами, соответствующим долготам φ_1 и φ_2 $\left(\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. $V = \frac{2}{3}R^3(\varphi_2 - \varphi_1)$ куб. ед.

Задача 3,16 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$; $(b > a > 0)$; 3) конусом, образующие которого наклонены к оси Oz под углом α (уравнение такого конуса $\theta = \alpha$); 4) плоскостью $y = x$; 5) плоскостью xOy и 6) плоскостью xOz.

Указание. Перейти к сферическим координатам. Уравнения сфер будут такими: $\rho = a$ и $\rho = b$.

В объеме (V) переменные ρ, θ и φ изменяются так:

а) ρ от a до b;

в) θ от α до $\frac{\pi}{2}$;

с) φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Ответ. $V = \frac{\pi}{12}(b^3 - a^3)\cos\alpha$ куб. ед.

Задача 3,17 (для самостоятельного решения). Найти массу части шара радиуса R, находящейся в первом октанте, если в каждой его точке плотность равна расстоянию этой точки от плоскости xOy.

Указание.

1. Плотность $\gamma = z$. По формуле (3,6) искомая масса

$$M = \iiint\limits_{(v)} z\,dx\,dy\,dz.$$

2. Перейти к сферическим координатам. Для этого заменить z по формуле (3,8), а $dx\,dy\,dz$ на элемент объема в сферических координатах — по формуле (3,11).

Ответ. $M = \frac{\pi R^4}{16}$.

Эту же задачу решите в прямоугольных координатах.

Задача 3,18. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями: 1) сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; 2) параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$. Плотность γ в каждой точке тела равна аппликате точки: $\gamma = z$ (см. чертеж к задаче 3,8).

Решение. Здесь выгодно перейти к цилиндрическим координатам, так как в уравнении параболоида имеется сумма $x^2 + y^2$, а в цилиндрических координатах, как видно из формул (3,10),

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело, в цилиндрических координатах, заменив $x^2 + y^2$ на ρ^2.

Уравнение сферы запишется так:

$$\rho^2 + z^2 = 4;\ \rho^2 = 4 - z^2.$$

Уравнение параболоида $\rho^2 = 3z$.

Из этих уравнений следует, что $z = \frac{\rho^2}{3}$ на параболоиде, $z = \sqrt{4 - \rho^2}$ — на сфере.

Спроектируем тело на плоскость xOy. Проекцией будет круг, ограниченный окружностью, радиус которого равен радиусу той окружности, по которой пересекаются поверхности, так как эта окружность без искажений проектируется на плоскость xOy. Радиус этой окружности проще всего определить так.

Найдем, при каком значении z пересекаются поверхности. Для этого решим совместно уравнения поверхностей, преобразованные уже к цилиндрическим координатам, т. е. определим z из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\rho^2 = 4 - z^2 \\ \rho^2 = 3z\end{array}\right\}.$$

Отсюда, приравнивая правые части этих уравнений, имеем

$$4 - z^2 = 3z; \quad z^2 + 3z - 4 = 0,$$

а

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -4.$$

Смыслу задачи удовлетворяет только $z_1 = 1$. Подставляя это значение $z_1 = 1$ в любое из уравнений системы, получим, что $\rho^2 = 3$, а $\rho = \sqrt{3}$.

Итак, радиус круга, в который спроектировалось тело, равен $R = \sqrt{3}$.

Таким образом, в теле переменные z, ρ и φ изменяются в пределах:

а) z от $\frac{\rho^2}{3}$ до $\sqrt{4 - \rho^2}$;

в) ρ от 0 до $\sqrt{3}$;

с) φ от 0 до 2π.

Масса тела

$$M = \iiint\limits_{(v)} z\, dx\, dy\, dz.$$

Поскольку координата z в цилиндрических координатах такая же, как и в прямоугольных, то для вычисления этого тройного интеграла следует только заменить элемент объема $dx\,dy\,dz$ по формуле (3,12) на $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Таким образом,

$$M = \iiint\limits_{(v)} z\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz.$$

Вычисления проведите самостоятельно — они очень просты.

Ответ. $M = \frac{13}{4}\pi$.

Задача 3,19 (для самостоятельного решения). Вычислить объем той части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам, заменив в уравнениях поверхностей x^2+y^2 на ρ^2

$$V=2\iiint\limits_{(v)}\rho d\rho\, d\varphi\, dz=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho d\rho\int\limits_0^{\sqrt{4R^2-\rho^2}}dz.$$

Ответ. $V=\frac{4}{3}\pi R^3(8-3\sqrt{3})$ куб. ед.

Задача 3,20 (для самостоятельного решения). Вычислить объем, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=R^2$; $x^2+y^2=z$; $z=0$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам.

Ответ. $V=\frac{\pi R^4}{2}$ куб. ед.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции плоских фигур и тел.

Упражнения этого практического занятия являются продолжением упражнений в вычислении двойных и тройных интегралов.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

1. Статические моменты площадей плоских фигур. Статические моменты плоской фигуры (σ) S_x и S_y относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются при помощи двойных интегралов по формулам

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y)\,y\,dx\,dy;\quad S_y=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y)\,x\,dx\,dy,\tag{4,1}$$

где $\gamma(x, y)$ — плотность распределения масс.

Если фигура однородна, то $\gamma(x, y)=\text{const}$, которую в приложениях часто принимают равной 1. В этом случае формулы (4,1) принимают вид

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)}y\,dx\,dy;\quad S_y=\iint\limits_{(\sigma)}x\,dx\,dy.\tag{4,2}$$

Если вычисления ведутся в полярных координатах, то $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, а элемент площади $dx\,dy$ должен быть заменен на $\rho d\rho d\varphi$.

Формулы (4,2) перепишутся так:

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi; \quad S_y = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi. \tag{4,3}$$

2. Координаты центра тяжести площади плоской фигуры вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, x dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, dx\, dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, dx\, dy}, \tag{4,4}$$

где x_c и y_c — соответственно абсцисса и ордината центра тяжести фигуры.

Если фигура однородна, то плотность $\gamma(x, y) = \mathrm{const}$. Эта величина может быть вынесена за знак интеграла в числителе и знаменателе и сокращена. Формулы (4,4) перепишутся так:

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} x\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} dx\, dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} y\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} dx\, dy}. \tag{4,5}$$

(Знаменатели этих дробей — площадь фигуры, центр тяжести которой отыскивается).

В полярные координаты эти формулы преобразовываются так же, как и формулы (4,2) (см. выше).

3. Моменты инерции площади плоской фигуры относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, y^2\, dx\, dy; \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, x^2\, dx\, dy. \tag{4,6}$$

Если фигура однородна, то плотность $\gamma(x, y) = \mathrm{const}$ и если она принимается равной единице, то формулы (4,6) приобретают вид

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\, dx\, dy; \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\, dx\, dy. \tag{4,7}$$

Преобразование этих формул к полярным координатам производится по тем же правилам, что и формул (4,2). (Моменты инерции относительно координатных осей часто называются осевыми моментами инерции).

В задачах, которые решаются на этом практическом занятии, все размеры указаны в сантиметрах.

I. Определение статических моментов и координат центра тяжести площади плоской фигуры *

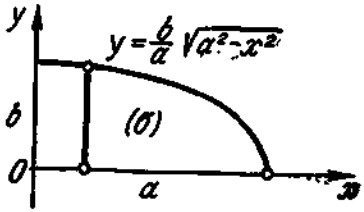
Задача 4,1. Определить статические моменты S_x и S_y однородной фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и координатными осями.

Решение. В области интегрирования (σ) переменные x и y изменяются в таких пределах:

переменная y от 0 до $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$;

переменная x от 0 до a.

Поэтому по формулам (4,2) получаем



К задаче 4,1

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)} y\,dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy=\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\ \text{а}\ S_x=\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{b}{2a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{b^2}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3.$$

$$S_x=\frac{1}{3}ab^2\ см^3;$$

$$S_y=\iint\limits_{(\sigma)} x\,dx\,dy=\int\limits_0^a x\,dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

Вычисления проведите самостоятельно

$$S_y=\frac{1}{3}a^2b\ см^3.$$

Задача 4,2 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести фигуры, указанной в предыдущей задаче.

Указание. Площадь этой фигуры как площадь одной четверти фигуры, ограниченной эллипсом, равна $\frac{\pi ab}{4}$. (Следует вспомнить, что площадь, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ равна πab).

Ответ. $x_c=\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}\ см;\quad y_c=\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{\pi}\ см.$

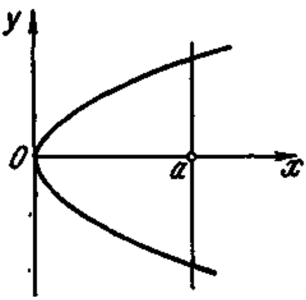
---

* В дальнейшем для сокращения записей в фразе «площади плоской фигуры» слово «площадь» мы опускаем.

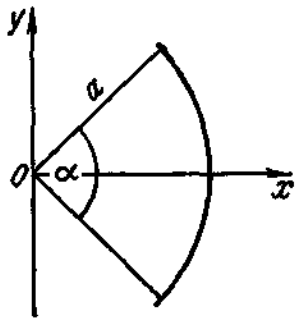
Задача 4,3 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и координатными осями, если в каждой точке фигуры плотность пропорциональна произведению координат этой точки: $\gamma(x, y) = kxy$ (см. чертеж к задаче 4,1).
k — коэффициент пропорциональности.

Указание. Знаменатели дробей в формулах (4,4), (т. е. масса этой фигуры) окажутся равными $\frac{1}{8}ka^2b^2$. Числители дробей равны соответственно $\frac{1}{15}ka^3b^2$ и $\frac{1}{15}ka^2b^3$.

Ответ. $x_c = \frac{8}{15}a$ *см*; $y_c = \frac{8}{15}b$ *см*.



К задаче 4,4



К задаче 4,5

Задача 4,4 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 2px$ и прямой $x = a$.

Указание. Учитывая симметрию фигуры относительно оси Ox, легко усмотреть, что центр тяжести лежит на оси Ox, а потому $y_c = 0$. Абсцисса центра тяжести определится по формуле (4,5).

В области (σ) переменные x и y изменяются в таких пределах:
переменная y от $-\sqrt{2px}$ до $+\sqrt{2px}$;
переменная x от 0 до a.
(Пределы интегрирования по y найдены так: из уравнения параболы $y^2 = 2px$ следует, что $y = \pm\sqrt{2px}$).

Ответ. $x_c = \frac{3}{5}a$ *см*.

Интересно отметить независимость полученного результата от параметра параболы.

Задача 4,5. Определить координаты центра тяжести сектора однородного круга радиуса a с центральным углом α, расположенного симметрично относительно оси Ox (см. чертеж).

Решение. Задачу удобно решать в полярных координатах. В формулах (4.5) выгодно перейти к полярным координатам, сделав в них такие замены: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, а элемент площади $dx\,dy$ должен быть заменен на $\rho d\rho d\varphi$. Тогда окажется, что

$$x_c=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)}\rho\,d\rho\,d\varphi};\quad y_c=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)}\rho\,d\rho\,d\varphi}.$$

Нам следует вычислить только x_c, так как из симметрии фигуры относительно оси Ox следует, что $y_c=0$.

В области (σ) переменные ρ и φ изменяются в таких пределах:

переменная ρ от 0 до a;

переменная φ от $-\frac{\alpha}{2}$ до $+\frac{\alpha}{2}$.

Поэтому числитель дроби в выражении для x_c

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^a\rho^2\,d\rho.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^a\rho^2\,d\rho=\frac{a^3}{3},$$

получаем

$$I=\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{a^3}{3}(\sin\varphi)\Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{3}a^3\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Знаменатель дроби в формуле для x_c

$$I_1=\iint\limits_{(\sigma)}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}d\varphi\int\limits_0^a\rho\,d\rho=\frac{1}{2}a^2\alpha.$$

(Мы могли бы I_1 не вычислять, так как из геометрии известно, что площадь кругового сектора радиуса a с центральным углом α равна половине произведения квадрата радиуса на центральный угол, выраженный в радианах).

Итак,

$$x_c=\frac{\frac{2}{3}a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}a^2\alpha}=\frac{2}{3}a\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\text{ см}.$$

Если $\alpha=\pi$, т. е. если сектор является полукругом, то

$$x_c=\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}\ см.$$

Центр тяжести полукруга находится от его диаметра на расстоянии, равном $\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$. Если же $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то

$$x_c=\frac{4}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{\pi}\ см.$$

Задача 4,6 (для самостоятельного решения). Найти статический момент однородного полукруга радиуса a относительно его диаметра и расстояние его центра тяжести от этого диаметра.

Указание. Решение провести в полярных координатах. Диаметр круга расположить на оси Ox, а его центр поместить в начало координат. Тогда по первой формуле в (4,3)

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{a}\rho^2\,d\rho;$$

$$S_x=\frac{2}{3}a^3\ см^3.$$

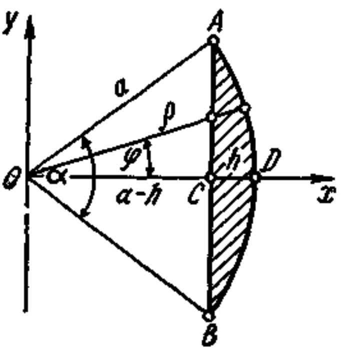
Учитывая, что площадь полукруга равна $\frac{\pi a^2}{2}$, для расстояния центра тяжести от диаметра получаем по второй формуле (4,5)

$$y_c=\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}\ см.$$

Этот результат уже известен нам из задачи 4,5, только в ней это расстояние было обозначено не через y_c, а через x_c.

Задача 4,7 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести сегмента однородного круга радиуса a, высоты h с центральным углом α (см. чертеж).

Указание. Уравнение линии OA: $y=x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а уравнение линии OB: $y=-x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Решение провести в прямоугольных координатах. Ордината центра тяжести из-за симметрии фигуры относительно оси Ox равна нулю. Абсциссу x_c центра тяжести найти по первой из формул (4,5). В области интегрирования переменные x и y изменяются так:



К задаче 4,7

переменная y от $-\sqrt{a^2-x^2}$ до $+\sqrt{a^2-x^2}$

переменная x от $a-h$ до a, но $a-h=a\cos\frac{\alpha}{2}$, а поэтому переменная x изменяется от $a\cos\frac{\alpha}{2}$ до a.

Числитель дроби в указанной формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} x\,dx\,dy = \int\limits_{a\cos\frac{\alpha}{2}}^{a} x\,dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

Этот интеграл равен

$$\frac{2}{3}a^3\sin^3\frac{\alpha}{2}.$$

Площадь сегмента, равная знаменателю дроби в формулах (4,5) равна разности площадей сектора $OADBO$ и треугольника OAB и может быть найдена без интегрирования. Учитывая, что площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними, т. е. $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, для площади сегмента получаем $\frac{1}{2}a^2(\alpha-\sin\alpha)$, так как площадь сектора равна $\frac{1}{2}a^2\alpha$. Этот результат полезно получить и вычислением интеграла в знаменателе дроби первой из формул (4,5).

Ответ. $x_c = \frac{4}{3}a\cdot\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ *см.*

Полезным упражнением будет решение этой же задачи в полярных координатах. Переменные ρ и φ изменяются в таких пределах:

$$\rho \text{ от } \frac{a-h}{\cos\varphi} \text{ до } a;$$

$$\varphi \text{ от } -\frac{\alpha}{2} \text{ до } \frac{\alpha}{2}.$$

Задача 4,8 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородного сектора кругового кольца с внутренним радиусом r, внешним R и центральным углом α (см. чертеж).

Указание. Вычисление провести в полярных координатах, преобразовав формулы (4,5) к этим координатам, как указано выше. В области интегрирования переменные ρ и φ изменяются так:

$$\rho \text{ от } r \text{ до } R;$$

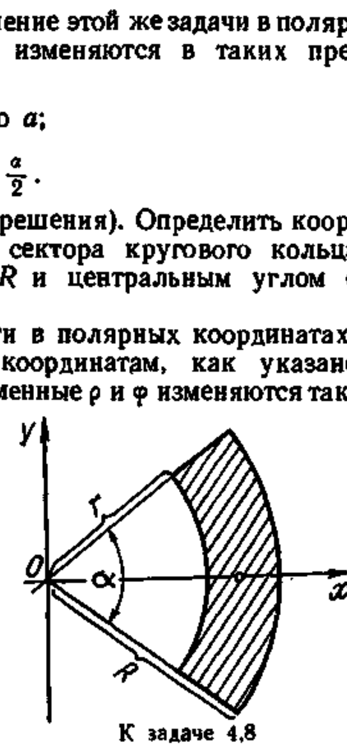
$$\varphi \text{ от } -\frac{\alpha}{2} \text{ до } \frac{\alpha}{2}.$$

Площадь этого кругового кольца равна разности площадей круговых секторов с радиусами r и R.

Ответ.

$$x_c = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\cdot\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}\text{ см};$$

$$y_c = 0.$$



К задаче 4,8

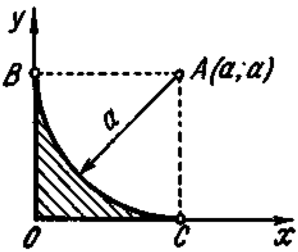
Задача 4,9 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести так называемого кругового треугольника (см. чертеж) — фигуры, ограниченной другой окружностью и координатными осями, которых она касается.

Указание. Уравнение окружности с центром в точке (a, a), радиуса a запишется так:

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2.$$

Чтобы определить пределы интегрирования, надо решить уравнение окружности относительно переменной y:

$$y=a\pm\sqrt{a^2-(x-a)^2}.$$



К задаче 4,9

На дуге BC $y=a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}$. В области интегрирования переменные x и y изменяются в таких пределах:

переменная y от 0 до

$$a-\sqrt{a^2-(x-a)^2};$$

переменная x от 0 до a. При вычислении x_c встретится интеграл

$$I=\int_0^a x\left(a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx. \qquad \text{(A)}$$

Его удобно представить в виде

$$\int_0^a [(x-a)+a]\left(a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^a \left[ax-(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}-a\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right]dx.$$

Интеграл

$$\int_0^a (x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=-\frac{1}{2}\left.\frac{[a^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a.$$

Интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$$

легко вычисляется по формуле

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\cdot u'\,dx=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}.$$

Интеграл $\quad I=\frac{a^3}{12}(10-3\pi).$

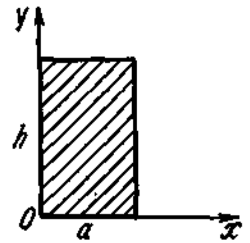
Площадь фигуры — знаменатель в дробях в формулах (4,5) — находится просто: она равна площади квадрата $OBAC$, т. е. a^2 минус площадь четверти круга $\frac{\pi a^2}{4}$ $см^2$. Площадь фигуры OBC равна, таким образом, $\frac{a^2}{4}(4-\pi)$.

Ответ. $x_c = y_c = \frac{a}{3} \cdot \frac{10-3\pi}{4-\pi} \approx 0{,}223\,a$ *см*.

II. Определение моментов инерции плоской фигуры

Задача 4,10. Найти момент инерции прямоугольника относительно его основания и высоты. Основание прямоугольника a *см*, высота h *см*.

Решение. Расположим оси прямоугольной системы координат так, как это показано на чертеже. Моменты инерции прямоугольника относительно его основания и высоты есть его моменты инерции относительно осей Ox и Oy соответственно.



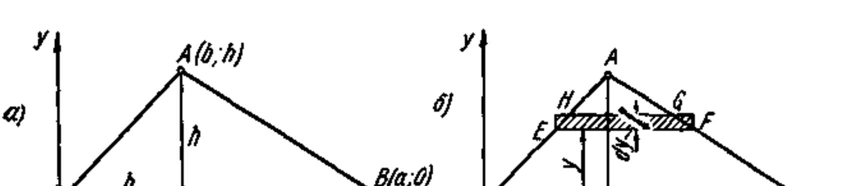
К задаче 4,10

По формулам (4,7) находим

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^h y^2\,dy = \frac{ah^3}{3}\,см^4;$$

$$I_y = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\,dx\,dy = \int\limits_0^a x^2\,dx \int\limits_0^h dy = \frac{a^3h}{3}\,см^4.$$

Задача 4,11. Найти момент инерции однородного треугольника относительно его основания (см. чертеж).



К задаче 4,11

Решение. Укажем два способа решения этой задачи:

1. Пусть основание треугольника равно a *см*, его высота h *см*, а отрезок основания OC от вершины O до высоты равен b *см* (см. чертеж а).

Уравнение стороны OA будет таким: $y = \frac{h}{b}x$, а уравнение стороны AB: $y = h - h\frac{x-b}{a-b}$ (это уравнение легко найти, пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки). В области интегрирования переменные x и y изменяются в таких пределах:

переменная x от $\frac{b}{h}y$ до $-\frac{y-h}{h}(a-b)+b$;

переменная y от 0 до h

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \int\limits_0^h y^2\,dy \int\limits_{\frac{b}{h}y}^{-\frac{y-h}{h}(a-b)+b} dx =$$

$$= \int\limits_0^h \left[-\frac{y-h}{h}(a-b)+b-\frac{by}{h}\right] y^2\,dy =$$

$$= \int\limits_0^h \left(a-\frac{ay}{h}\right) y^2\,dy = \left(\frac{ay^3}{3}-\frac{ay^4}{4h}\right)\Big|_0^h =$$

$$= \frac{ah^3}{3}-\frac{ah^3}{4} = \frac{ah^3}{12}\text{ см}^4.$$

Итак, момент инерции треугольника относительно его основания

$$I_x = \frac{ah^3}{12}\text{ см}^4.$$

2. Перепишем первую формулу в (4,7) так:

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,d\sigma. \tag{A}$$

Найдем элемент $EFGH$ площади (см. чертеж б) к этой задаче) — площадь прямоугольника с высотой dy и основанием $EF: d\sigma = EF\cdot dy$. Определим EF в зависимости от y.

Из подобия треугольников OAB и EFA

$$\frac{EF}{OB} = \frac{h-y}{h};\quad EF = a\cdot\frac{h-y}{h},$$

а

$$d\sigma = a\cdot\frac{h-y}{h}\,dy.$$

Если подставить это выражение под знак интеграла в (A), то мы получим одномерный определенный интеграл

$$I_x = \int\limits_0^h y^2\cdot a\cdot\frac{h-y}{h}\,dy$$

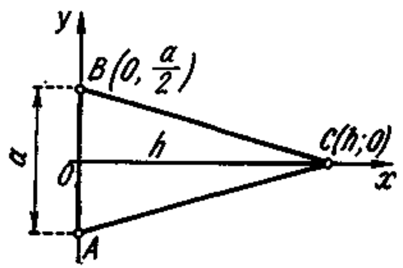
и для I_x получится ранее найденное значение.

Конечно, второе решение проще первого, но его нельзя не признать несколько искусственным. Все-таки проще пользоваться общим приемом, чем каждый раз находить $d\sigma$.

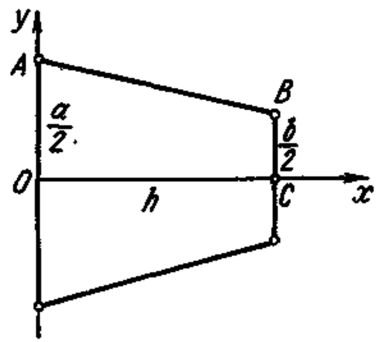
Задача 4, 12 (для самостоятельного решения). Найти моменты инерции однородного равнобедренного треугольника относительно его высоты (см. чертеж). Основание треугольника равно a *см*, высота h *см*.

Указание. Расположить оси, как показано на чертеже. Уравнение стороны BC: $y = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{x}{h}\right)$.

Вычислить момент инерции треугольника OBC относительно оси Ox и полученное число умножить на 2, так как момент



К задаче 4,12



К задаче 4,13

инерции треугольника ABC равен удвоенному моменту инерции треугольника OBC.

Ответ. $I_x = \frac{a^3h}{48}$ *см*^{4}.

Задача 4, 13 (для самостоятельного решения). Найти момент инерции однородной равносторонней трапеции относительно прямой, соединяющей середины оснований. Размеры: большее основание равно a *см*, меньшее b *см*, высота h *см*.

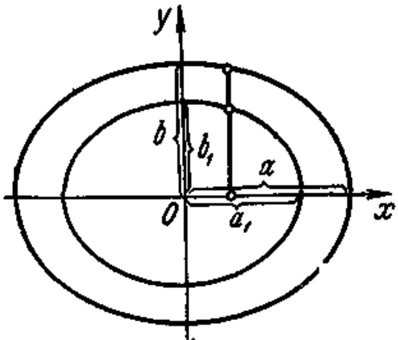
Указание. Расположить оси, как указано на чертеже. Найти момент инерции трапеции $OABC$ и найденное число удвоить. Уравнение стороны AB: $y = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{h} + \frac{a}{2}$.

Ответ. $I_x = \frac{h}{48} \cdot \frac{a^4 - b^4}{a - b}$ *см*^{4}.

Задача 4, 14. Определить момент инерции I_x и I_y эллиптического однородного кольца, образованного двумя эллипсами с общим центром и совпадающими осями («концентрические» эллипсы). Оси внешнего эллипса a *см* и b *см*, а внутреннего a_1 *см* и b_1 *см*.

Решение. Вычислим моменты инерции четверти эллиптического кольца, расположенного в первой четверти. Для этого вычислим моменты инерции $I_x^{\text{внешн}}$ и $I_y^{\text{внешн}}$ площади, ограниченной внешним эллипсом и осями координат ($x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$), и вычтем из них соответственно моменты инерции $I_x^{\text{внутр}}$ и $I_y^{\text{внутр}}$ площади, ограниченной внутренним эллипсом и осями координат.

В первой четверти на площади, ограниченной внешним эллипсом и осями координат, переменные x и y изменяются в таких пределах:



К задаче 4,14

$$y \text{ от } 0 \text{ до } \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$
$$x \text{ от } 0 \text{ до } a.$$

Поэтому

$$\frac{I_x^{\text{внешн}}}{4} = \int\limits_0^a ax \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy = \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому

$$\frac{I_x^{\text{внешн}}}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\int\limits_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Для вычисления $\int\limits_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$ удобно применить тригонометрическую подстановку: $x = a\sin t$. Пределы интегрирования после подстановки станут равны 0 и $\frac{\pi}{2}$, а

$$\int\limits_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt.$$

С вычислением этого интеграла читатель неоднократно встречался. В результате вычислений окажется, что

$$I_x^{\text{внешн}} = \frac{1}{4}\pi ab^3 \text{ см}^4.$$

Совершенно ясно, что $I_x^{\text{внутр}} = \frac{1}{4}\pi a_1 b_1^3$.

Поэтому

$$I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3 - \frac{1}{4}\pi a_1 b_1^3$$

и окончательно момент инерции эллиптического концентрического кольца относительно оси Ox

$$I_x = \frac{\pi}{4}(ab^3 - a_1 b^3)\ см^4. \qquad (A)$$

Докажите самостоятельно, что

$$I_y = \frac{\pi}{4}(a^3 b - a_1^3 b)\ см^4. \qquad (B)$$

Из полученных формул легко определить моменты инерции площади, ограниченной эллипсом, и площади круга. Чтобы получить моменты инерции площади, ограниченной эллипсом, а не эллиптическим кольцом, надо в предыдущих формулах взять $a_1 = 0$ и $b_1 = 0$.

Получим для эллипса

$$I_x = \frac{\pi}{4}ab^3; \quad I_y = \frac{\pi}{4}a^3 b.$$

Так как при $a = b$ эллипс становится окружностью, то для моментов инерции круга из последних формул получаем

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}a^4\ см^4.$$

Из формул (A) и (B) легко получаются моменты инерции кругового кольца. В этом случае $b = a$, $b_1 = a_1$ и моменты инерции кругового кольца определятся по формулам

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(a^4 - a_1^4)\ см^4,$$

где a — радиус внешней окружности, а a_1 — радиус внутренней окружности.

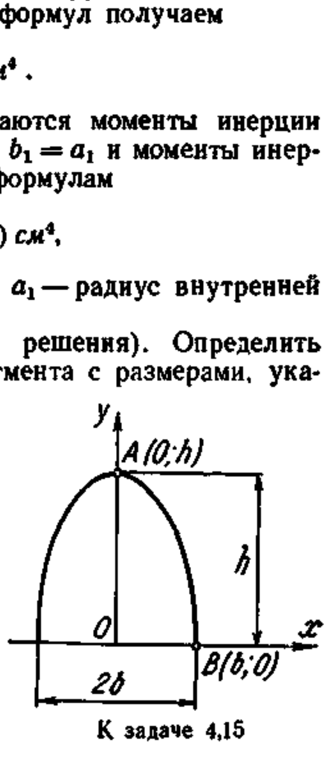
Задача 4, 15 (для самостоятельного решения). Определить момент инерции I_x параболического сегмента с размерами, указанными на чертеже.

Указание. Уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + c$. Параметры a и c определить, учитывая, что парабола проходит через точки $(0, h)$ и $(b, 0)$.

Окажется, что $a = -\frac{h}{b^2}$; $c = h$, уравнение параболы будет таким:

$$y = -\frac{h}{b^2}x^2 + h.$$

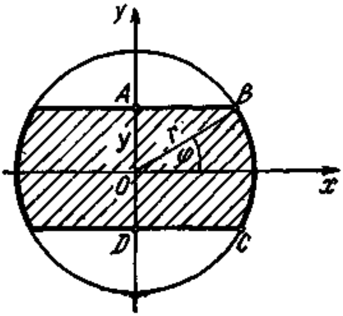
Ответ. $I_x = \frac{32}{105}bh^3\ см^4$.



К задаче 4,15

Задача 4,16 (для самостоятельного решения). Определить относительно оси Ox момент инерции фигуры, изображенной на чертеже.

Указание. Вычислить момент инерции половины площади фигуры, а полученное число удвоить. Так как уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$, то переменные x и y в области интегрирования изменяются:



К задаче 4,16

переменная x от 0 до $\sqrt{r^2-y^2}$;
переменная y от 0 до $r\sin\varphi$

(φ — величина постоянная).

$$I_x = 2\iint_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^{r\sin\varphi} y^2\,dy \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx.$$

Интеграл $\int_0^{r\sin\alpha} y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy$ удобно вычислить с помощью тригонометрической подстановки $y=r\sin u$. Пределами интегрирования станут 0 и u. При определении нового верхнего предела окажется, что $\varphi=u$. Поэтому удобно верхний предел обозначить через φ, чтобы он отличался от переменной u, по которой ведется интегрирование.

Заменить $\sin^2 u\cos^2 u$ через $\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2u$.

Ответ.

$$I_x = \frac{r^4}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\ см^4.$$

III. Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции тел

1. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей xOy, yOz и xOz вычисляются по формулам

$$S_{xy} = \iiint_{(v)} \gamma z\,dv;\quad S_{yz} = \iiint_{(v)} \gamma x\,dv;\quad S_{xz} = \iiint \gamma y\,dv. \qquad (4,8)$$

2. Координаты x_c, y_c, z_c центра тяжести тела определяются по формулам:

$$\left.\begin{array}{c} x_c = \dfrac{\iiint\limits_{(v)} \gamma x\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv}; \quad y_c = \dfrac{\iiint\limits_{(v)} \gamma y\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv} \\ z_c = \dfrac{\iiint\limits_{(v)} \gamma z\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv} \end{array}\right\}. \tag{4,9}$$

3. Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(v)} \gamma z^2\, dv; \quad I_{yz} = \iiint\limits_{(v)} \gamma x^2\, dx; \quad I_{xz} = \iiint\limits_{(v)} \gamma y^2\, dv. \tag{4,10}$$

4. Моменты инерции тела относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$I_x = \iiint\limits_{(v)} \gamma (y^2 + z^2)\, dv; \; I_y = \iiint\limits_{(v)} \gamma (x^2 + z^2)\, dv; \tag{4,11}$$

$$I_z = \iiint\limits_{(v)} \gamma (x^2 + y^2)\, dv.$$

Момент инерции тела относительно начала координат

$$I_0 = \iiint\limits_{(v)} \gamma\, x^2 + y^2 + z^2)\, dv. \tag{4,12}$$

Во всех этих формулах $\gamma = \gamma(x, y, z)$ — переменная плотность, dv — элемент объема. В случае, если тело однородно, то, применяя эти формулы, часто удобно считать, что $\gamma = 1$.

Если вычисления по этим формулам ведутся в цилиндрических координатах, надо x, y и z заменить по формулам (3, 10), а элемент объема dv — на $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

При вычислении в сферических координатах надо x, y и z заменить по формулам (3,8), а элемент объема dv — на $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$.

В прямоугольных координатах элемент объема

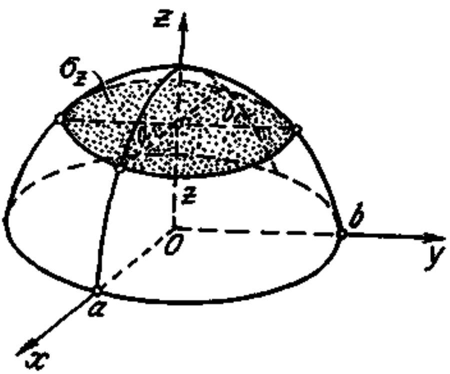
$$dv = dx\, dy\, dz.$$

Задача 4,17. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела, расположенного над плоскостью xOy и ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad z = 0 \quad (z \geqslant 0).$$

Решение. Воспользуемся формулами (4, 9). Тело по условию однородно, и мы полагаем в них $\gamma = 1$. Из симметрии тела относительно координатных плоскостей xOz и yOz видно, что $x_c = 0$; $y_c = 0$, центр тяжести лежит на оси Oz. Знаменатель дроби в каждой из формул (4, 9) при $\gamma = 1$ — объем тела. Объем тела, ограниченный эллипсоидом, нами уже вычислен в задаче 2,10. Он равен $\frac{4}{3}\pi abc$. Поэтому интересующий нас объем равен половине этого объема, т. е. $\frac{2}{3}\pi abc$.

Остается только вычислить числитель в третьей из формул (4,9). С учетом того, что вычисления ведутся в прямоугольной системе координат, в которых элемент объема $dv = dx\,dy\,dz$, имеем



К задаче 4,17

$$\iiint\limits_{(v)} z\,dv = \iiint\limits_{(v)} z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^c z\,dz \iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy, \qquad (A)$$

где σ_z — область, полученная в сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Oz на расстоянии z от плоскости xOy $(z < c)$. Если считать z величиной фиксированной, то из уравнения эллипсоида следует, что уравнение эллипса в этом сечении

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Полуоси этого эллипса равны

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}; \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ в формуле (А) равен площади этого эллипса, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy = \pi a_1 b_1 = \pi a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Поэтому интересующий нас интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} z\,dv = \int\limits_0^c z\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz =$$

$$= \pi ab\int\limits_0^c\left(z-\frac{z^3}{c^2}\right)dz = \pi ab\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4c^2}\right)\Bigg|_0^c =$$

$$= \pi ab\left(\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\pi abc^2,$$

а

$$z_c = \frac{\frac{1}{4}\pi abc^2}{\frac{2}{3}\pi abc} = \frac{3}{8}c \text{ см}.$$

$$x_c = 0;\quad y_c = 0;\quad z_c = \frac{3}{8}\text{ см}.$$

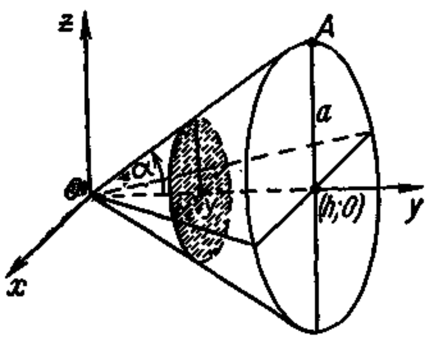
Задача 4,18. Найти координаты центра тяжести однородного кругового конуса, радиус основания которого равен a, а высота h.

Решение. Поверхность конуса образована вращением прямой OA вокруг оси Oy. Уравнение этой прямой $z = y\operatorname{tg}\alpha$. Уравнение поверхности конуса

$$\pm\sqrt{x^2+z^2} = y\operatorname{tg}\alpha,$$

или

$$x^2+z^2 = y^2\operatorname{tg}^2\alpha. \qquad \text{(A)}$$



К задаче 4,18

Из симметрии тела относительно координатных плоскостей xOy и yOz ясно, что его центр тяжести лежит на оси Oy, а $x_c = z_c = 0$.

Чтобы вычислить y_c, надо воспользоваться второй из формул (4,9). В этой формуле знаменатель дроби — объем конуса, равный $\frac{1}{3}\pi a^2h$, а потому нам остается вычислить только числитель этой дроби, т. е.

$$\iiint\limits_{(v)} y\,dv = \iiint\limits_{(v)} y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^h y\,dy\iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz, \qquad \text{(B)}$$

где (σ_y) — сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси Oy при фиксированном значении $y (O < y < h)$. Этим сечением является круг, радиус которого из уравнения (A) равен

$$r = y\operatorname{tg}\alpha.$$

В уравнении (A) правая часть при постоянном y равна квадрату радиуса.

Двойной интеграл в (B) равен площади этого круга, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz = \pi r^2 = \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

а потому из формулы (B)

$$\int\limits_0^h y\,dy \iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz = \int\limits_0^h y \cdot \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\,dy =$$

$$= \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \int\limits_0^h y^3\,dy = \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{h^4}{4}.$$

Но $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{h}$, а потому этот интеграл равен

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{h^2} \cdot h^4 = \frac{1}{4} \pi a^2 h^2.$$

Окончательно, деля эту величину на объем конуса, получим, что

$$y_c = \frac{\frac{1}{4} \pi a^2 h^2}{\frac{1}{3} \pi a^2 h} = \frac{3}{4} h \text{ см}.$$

Таким образом, центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его оси на расстоянии, равном $\frac{3}{4} h$ от вершины.

Задача 4,19 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

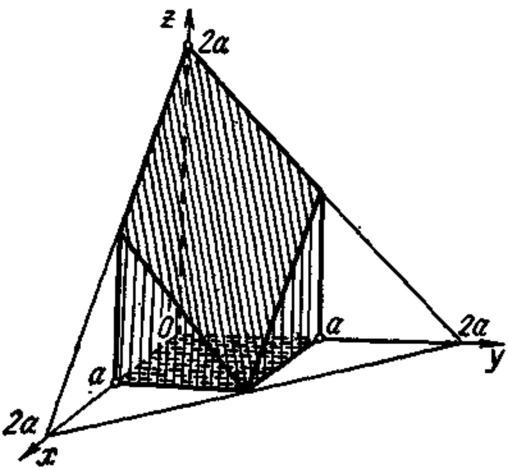
Ответ.

$$x_c = y_c = z_c = \frac{a}{4}.$$

Задача 4,20 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 2a$; $x = a$; $y = a$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Ответ.

$x_c = \frac{5}{12} a$ *см*; $y_c = \frac{5}{12} a$ *см*; $z_c = \frac{7}{12} a$ *см*.

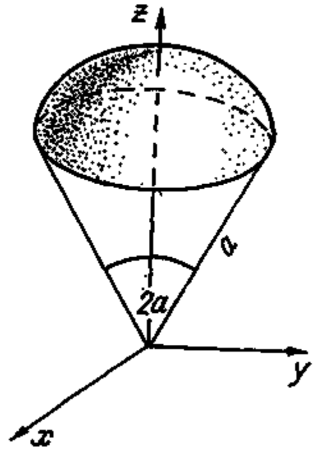


К задаче 4,20

Задача 4,21. Найти центр тяжести сектора однородного шара радиуса a с телесным углом 2α.

Решение. Разместим оси, как указано на чертеже. Вычисления проведем в сферических координатах. Ясно, что центр тяжести находится на оси Oz, а потому $x_c = y_c = 0$. Координату центра тяжести найдем по третьей формуле в (4,9). После перехода к сферическим координатам ($z = \rho\cos\theta$; $dv = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$) получим

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{\iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}. \qquad (A)$$



К задаче 4.21

Переменные ρ, θ и φ в области интегрирования изменяются так:

ρ от 0 до a;
θ от 0 до α;
φ от 0 до 2π.

Знаменатель дроби в этой формуле — объем (v) указанного шарового сектора. В задаче 3,13 этот объем уже вычислен. Вычисляем числитель дроби в (A)

$$\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\alpha} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int\limits_0^{a} \rho^3 \, d\rho =$$

$$= \frac{a^4}{4} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} \cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$z_c = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha}{\frac{4}{3}\pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{16} a \cdot \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно

$$z_c = \frac{3}{4} a \cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ см}.$$

Задача 4,22 (для самостоятельного решения). Найти координаты центра тяжести клинообразного однородного тела, ограниченного сферой радиуса a, плоскостью xOy и двумя меридианными плоскостями, составляющими с плоскостью xOz углы с соответственно равными φ_1 и φ_2

$$\left(\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right).$$

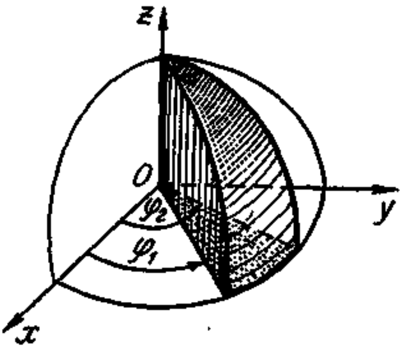
Указание. На основании результата, полученного в задаче 3,15, объем интересующего нас тела

$$V = \frac{1}{3} a^3 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

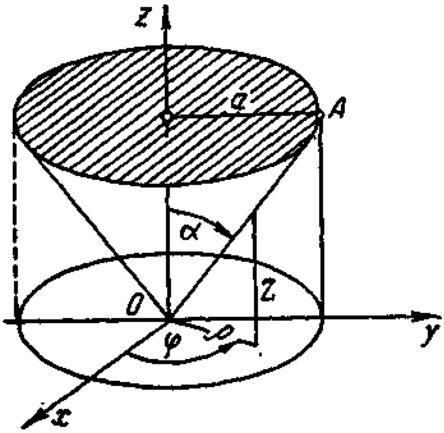
Вычисления провести в сферических координатах. Числители дробей в (4,9) для вычисления x_c, y_c и z_c окажутся соответственно равными

$$I_1 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin^2\theta \cos\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi; \quad I_2 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin^2\theta \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi;$$

$$I_3 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$



К задаче 4,22



К задаче 4,23

Переменные ρ, θ и φ в области интегрирования изменяются так:

ρ от 0 до a;

θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$;

φ от φ_1 до φ_2.

Указанные выше интегралы окажутся соответственно равными:

$$\frac{\pi a^4}{16} (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1); \quad \frac{\pi a^4}{16} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2);$$

$$\frac{a^4 (\varphi_2 - \varphi_1)}{8};$$

Ответ. $x_c = \frac{3}{16} \pi a \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$; $\quad y_c = \frac{3}{16} \pi a \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}$; $z_c = \frac{3}{8} a$.

Задача 4,23 (для самостоятельного решения). Определить момент инерции однородного кругового конуса относительно его оси, если высота конуса равна h *см*, радиус основания a *см*, угол между образующей и высотой конуса равен α.

Указание. Расположить координатные оси, как показано на чертеже. Уравнение поверхности конуса в цилиндрических координатах $z = \rho \operatorname{ctg} \alpha$.

Наличие суммы $x^2 + y^2$ в (4,11) указывает на целесообразность перейти к цилиндрическим координатам, в которых $x^2 + y^2 = \rho^2$, а $dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

В области интегрирования переменные z, ρ и φ изменяются так: z от его значения $z = \rho \operatorname{ctg} \alpha$ на поверхности конуса до $z = h$ на его основании; переменная ρ от 0 до a, а φ — от 0 до 2π. Поэтому

$$I_z = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^3\, d\rho \int\limits_{\rho \operatorname{ctg} \alpha}^{h} dz.$$

Ответ. $I_z = \frac{1}{10} \pi a^4 h$ $см^5$.

Задача 4,24. Определить момент инерции однородного полого кругового цилиндра относительно его оси (ось Oz). Высота цилиндра равна h *см*, внутренний радиус a *см*, внешний b *см*.

Указание. $I_z = \iiint\limits_{(v)} (x^2 + y^2)\, dv$. Перейти к цилиндрическим координатам.

Ответ. $I_z = \frac{1}{2} \pi h (b^4 - a^4)$ $см^5$.

Задача 4,25 (для самостоятельного решения). Определить момент инерции относительно оси Ox однородного тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Указание.

$$I_x = \iiint\limits_{(v)} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} (y^2 + z^2)\, dy\, dz =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\, dy\, dz + \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\, dy\, dz, \qquad \text{(A)}$$

где (σ_x) — область, ограниченная эллипсом, по которому плоскость, перпендикулярная оси Ox, при фиксированном x, пересекает эллипсоид. Уравнение этого эллипса получим из уравнения эллипсоида, считая, что в нем x — величина постоянная:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Полуоси этого эллипса

$$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \qquad \text{(B)}$$

Интегралы

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz \text{ и } \iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz$$

равны соответственно моментам инерции этого эллипса относительно его осей c_1 и b_1. В задаче 4,14 моменты инерции эллипса относительно его осей были получены:

$$I_{c_1} = \frac{1}{4}\pi b_1^3 c_1;\quad I_{b_1} = \frac{1}{4}\pi b_1 c_1^3.$$

Подставляя сюда значения b_1 и c_1 из соотношений (B), получим

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz = I_{c_1} = \frac{1}{4}\,b^3c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2;$$

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz = I_{b_1} = \frac{1}{4}\,bc^3\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

Подставляя эти значения в (A) и выполняя интегрирование по x, получим окончательно

$$I_x = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2+c^2)\ см^5.$$

Аналогично найдем моменты инерции этого тела относительно осей Oy и Oz:

$$I_y = \frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+c^2)\ см^5;$$

$$I_z = \frac{4}{14}\pi abc\,(a^2+b^2)\ см^5.$$

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Криволинейные интегралы.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

I. Криволинейный интеграл I типа

Пусть на плоскости xOy задана кривая линия (L), в каждой точке которой определена функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y, предполагаемая непрерывной.

Разобьем дугу AB кривой (L) на n частей точками: $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$. На каждой части A_iA_{i+1} выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$. Вычислим в этой точке значение заданной на кривой функции $f(x, y)$. Число $f(x_i, y_i)$ умножим на длину дуги $A_iA_{i+1} = \Delta S_i$. Сложим все эти произведения. Получится сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$

Отыщем предел этой суммы при условии, что наибольшая из дуг A_iA_{i+1} стремится к нулю, а число их $n \to \infty$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках дуги AB, то этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги AB на части, ни от выбора точки $M(x_i, y_i)$ на каждой из этих частей.

Этот предел называется криволинейным интегралом I типа и обозначается символом

$$\int\limits_{(\breve{A}B)} f(x, y)\,dS.$$

Таким образом,

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i = \int\limits_{(\breve{A}B)} f(x, y)\,dS.$$

Из этого следует, что кривой (AB) не приписывается определенного направления, т. е.

$$\int\limits_{(\breve{A}B)} f(x, y)\,dS = \int\limits_{(\breve{B}A)} f(x, y)\,dS.$$

По аналогии с этим, если (AB) — пространственная кривая, то криволинейным интегралом, распространенным на эту кривую, называется интеграл вида

$$\int\limits_{(\breve{A}B)} f(x, y, z)\,dS,$$

где $f(x, y, z)$ — функция трех независимых переменных, определенная в каждой точке кривой (AB), причем

$$\int\limits_{(\breve{A}B)} f(x, y, z)\,dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i.$$

II. Формула для вычисления криволинейного интеграла I типа

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\},$$

а параметр t изменяется на дуге AB от $t = \alpha$ до $t = \beta$, то криволинейный интеграл I типа вычисляется по формуле

$$\int\limits_{(\breve{A}B)} f(x, y)\,dS = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (5;1)$$

При этом предполагается, что производные функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывны.

Если кривая (AB) задана уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_{(\breve{A}B)} f(x, y)\,dS = \int_{a}^{b} f[x, f(x)] \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (5,2)$$

III. Механический смысл криволинейного интеграла I типа

Если в каждой точке кривой (AB) плотность μ масс, расположенных вдоль кривой, является заданной функцией координат этой точки, т. е. $\mu = f(x, y)$, *то масса m этой кривой равна криволинейному интегралу I типа:*

$$m = \int_{(\breve{AB})} f(x, y)\, dS. \tag{5,3}$$

Если масса распределена непрерывно вдоль дуги кривой (AB) с плотностью $\mu = f(x, y)$ в каждой точке этой кривой, то статические моменты s_x и s_y дуги относительно координатных осей Ox и Oy определяются по формулам

$$S_x = \int_{(\breve{AB})} yf(x, y)\, ds; \quad S_y = \int_{(\breve{AB})} xf(x, y)\, ds. \tag{5,4}$$

Моменты инерции этой дуги относительно координатных осей равны

$$I_x = \int_{(AB)} y^2 f(x, y)\, ds; \quad I_y = \int_{(\breve{AB})} x^2 f(x, y)\, ds. \tag{5,5}$$

6. Координаты центра тяжести дуги (AB) определяются по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m}; \quad y_c = \frac{S_x}{m}, \tag{5,6}$$

где m — масса этой дуги.

Формулы (5,6) с учетом формул (5,3) и (5,4) запишутся так:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(\breve{AB})} xf(x, y)\, ds}{\int\limits_{(\breve{AB})} f(x, y)\, ds}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(\breve{AB})} yf(x, y)\, ds}{\int\limits_{(\breve{AB})} f(x, y)\, ds}. \tag{5,7}$$

Если кривая однородна, то плотность $\mu = f(x, y) = \text{const}$, а потому формулы (5,7) запишутся в виде

$$x_c = \frac{\int\limits_{(\breve{AB})} x\, ds}{\int\limits_{(AB)} ds}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(\breve{AB})} y\, ds}{\int\limits_{(\breve{AB})} ds}, \tag{5,8}$$

где $\int\limits_{(\breve{AB})} ds$ — длина дуги AB.

Задача 5,1. Вычислить интеграл $\int\limits_{(\breve{AB})} x^2 y\, ds$, где (AB) есть часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в первой четверти.

Решение. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ запишем, выражая явно ординату y через абсциссу x, и применим формулу (5,2).

Из $x^2+y^2=R^2$ следует, что $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (перед корнем удержан знак плюс потому, что в первой четверти $y \geqslant 0$). Чтобы применить формулу (5,2), найдем $\sqrt{1+y'^2(x)}$:

$$y'(x)=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}};\quad y'^2=\frac{x^2}{R^2-x^2};\quad 1+y'^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=$$
$$=\frac{R^2}{R^2-x^2};\ \sqrt{1+y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Поэтому по (5,2)

$$\int\limits_{(AB)} x^2y\,ds=\int\limits_0^R x^2\cdot\underbrace{\sqrt{R^2-x^2}}_{y}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=R\int\limits_0^R x^2\,dx=R\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^R=\frac{R^4}{3}.$$

В дальнейшем все размеры указаны в сантиметрах.

Задача 5,2 (для самостоятельного решения). Вычислить $I=\int\limits_{(AB)} x^2y\,ds$, где (AB) — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте.

Указание. Воспользоваться формулой (5,2).

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};\ y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$
$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}};$$
$$I=\int\limits_0^a x^2\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$
$$=\frac{b}{a^2}\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла удобно применить подстановку

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin z.$$

Тогда $\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}=a^2\cos z;\ dx=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos z\,dz.$

$$I=\frac{b}{a^2}\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\frac{a^4}{a^2-b^2}\sin^2 z\cdot a^2\cos z\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos z\,dz=$$
$$=\frac{a^6b}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\sin^2 z\cos^2 z\,dz=$$
$$=\frac{a^6b}{8(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(z-\frac{1}{4}\sin 4z\right)\Big|_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}.$$

Учесть, что: 1)

$$\sin^2 z \cos^2 z = \left(\frac{1}{2}\sin 2z\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2z = \frac{1}{8}(1-\cos 4z)$$

2)

$$\sin 4z = 4\sin z\cos z(1-2\sin^2 z).$$

Ответ.

$$I = \frac{a^4 b}{8(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \frac{b(2b^2-a^2)\sqrt{a^2-b^2}}{a^4}\right).$$

Задача 5,3 (для самостоятельного решения). Вычислить $\int\limits_{(AB)} (y-x)\,ds$, где (AB) — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $(1,1)$ до точки $(2,8)$.

Указание. Воспользоваться формулой (5,2). Под интегралом заменить y на x^3. На дуге (AB) x изменяется от 1 до 2:

$$I = \int\limits_1^2 (x^3 - x)\sqrt{1+9x^4}\,dx; \quad I_1 = \int\limits_1^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx;$$

$$I_2 = \int\limits_1^2 x\sqrt{1+9x^4}\,dx.$$

При вычислении I_2 удобна подстановка $3x^2 = z$. Изменить пределы интегрирования: $z = 3$ при $x = 1$;

$$z = 12 \text{ при } x = 2.$$

$$I_2 = \frac{1}{6}\int\limits_3^{12}\sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{1}{6}\left[\frac{z}{2}\sqrt{1+z^2} + \frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right]\Bigg|_3^{12}.$$

Ответ.

$$\frac{1}{5}\left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{6}\left(6\sqrt{145} - \frac{3}{2}\sqrt{10} + \ln\sqrt{\frac{12+\sqrt{145}}{3+\sqrt{10}}}\right)$$

Задача 5,4. Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости, а также ее момент инерции относительно оси Ox. Плотность считать равной единице.

Решение. Центр тяжести дуги кривой определяется по формулам (5,8). Из соображений симметрии ясно, что он находится на оси Oy. Поэтому $x_c = 0$.

Ордината центра тяжести

$$y_c = \frac{\int\limits_{(AB)} y\,ds}{\int\limits_{(AB)} ds}.$$

Знаменатель этой дроби — длина полуокружности. Поэтому

$$\int\limits_{(AB)} ds = \pi R.$$

Для вычисления числителя воспользуемся параметрическими уравнениями окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}\right\}. \tag{A}$$

Дифференциал дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\,dt$

$$\int\limits_{(AB)} y\,ds = \int\limits_0^\pi R\sin t \cdot R\,dt = R^2\int\limits_0^\pi \sin t\,dt = R^2(-\cos t)\Big|_0^\pi = 2R^2;$$

$$y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}\ см.$$

Итак, искомые координаты центра тяжести

$$x_c = 0;\quad y_c = \frac{2R}{\pi}\ см.$$

Из решения этой задачи следует, что статический момент полуокружности относительно стягивающего ее диаметра $S_d = 2R^2\ см^2$.

По первой формуле (5,5) момент инерции относительно оси с учетом, что плотность равна единице:

$$I_x = \int\limits_{(AB)} y^2\,ds.$$

Из (A) следует, что $y^2 = R^2\sin^2 t$, и учитывая, что $ds = R\,dt$, получим

$$\int\limits_{(AB)} y^2\,ds = \int\limits_0^\pi R^3\sin^2 t\,dt = R^3\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi R^3}{2}\ см^3.$$

Задача 5,5 (для самостоятельного решения). Найти центр тяжести одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Считать плотность равной единице.

Указание. Воспользоваться формулами (5,8). Учесть, что знаменатель дробей в этих формулах $\int\limits_{(AB)} ds$ — длина дуги одной арки циклоиды, равная 8a (она вычислена в третьей книге автора «Практические занятия по высшей математике»).

Учитывая симметрию, сразу заключаем, что абсцисса центра тяжести $x_c = \pi a$. Ордината центра тяжести $y_c = \dfrac{\int\limits_{(AB)} y\,ds}{\int\limits_{(AB)} ds}$.

Дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin\frac{t}{2}\,dt; \quad \int\limits_{AB} ds = 8a.$$

$$\int\limits_{(AB)} y\,ds = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{32}{3}a^2.$$

Ответ. $x_c = \pi a$ *см*; $y_c = \frac{4}{3}a$ *см*.

Задача 5,6 (для самостоятельного решения). Определить центр тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$. Плотность считать равной единице.

Ответ. $x_c = y_c = \frac{2}{5}a$ *см*.

Задача 5,7 (для самостоятельного решения). Вычислить статический момент относительно координатных осей прямолинейного отрезка (AB), соединяющего точки (a, a) и (b, b) $(b > a)$. Плотность в каждой точке отрезка равна произведению координат этой точки.

Указание. Воспользоваться формулами (5,4).

$$S_x = \int\limits_{(AB)} y(xy)\,ds; \quad S_y = \int\limits_{(AB)} x\cdot(xy)\,ds.$$

Уравнение отрезка AB: $y = x$; $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{2}dx$

Ответ. $S_x = S_y = \frac{\sqrt{2}}{4}(b^4 - a^4)$ *см*^{4}.

Задача 5,8 (для самостоятельного решения). Найти массу кривой $y = x^2$ от точки $x = 0$ до $x = \sqrt{2}$, если в каждой точке кривой плотность равна квадрату ее абсциссы.

Указание. Использовать формулу (5,4), в которой $f(x, y) = x^2$, а $ds = \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$. Интеграл $\int x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$ записать в виде

$$\int\frac{x^2(1+4x^2)}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{1+4x^2} + E\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определить на основании указаний задачи 9,33 в третьей части этой книги.

Ответ. Масса $m = \frac{17\sqrt{2}}{32} - \frac{1}{64}\ln(2\sqrt{2} + 3)$.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Найти массу участка кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = \sqrt{3}$ до точки с абсциссой $x_2 = 2\sqrt{2}$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

Указание. $ds = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$.

Ответ. $m = \frac{19}{3}$.

Задача 5,10 (для самостоятельного решения). Найти массу кривой $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ на участке от $x = 0$ до $x = a$, считая, что в каждой точке плотность обратно пропорциональна ординате этой точки.

Указание. Дифференциал дуги $ds = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$; $m = \int_0^a \frac{k}{y} ds$.

Ответ. $m = k$, где k — коэффициент пропорциональности.

II. Криволинейные интегралы II типа

Пусть во всех точках дуги AB плоской кривой (L) определена функция двух независимых переменных $P(x, y)$.

Дугу AB разобьем на n частичных дуг точками $A_0 = A$; $A_1, A_2, \ldots A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n = B$. На каждой из частичных дуг выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$. В этой точке вычислим значение функции $P(x, y)$. Полученное число $P(x_i, y_i)$ умножим на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось Ox и получим произведение $P(x_i, y_i)\Delta x_i$.

Сложив все такие произведения, получим сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i.$$

Если функция $P(x, y)$ непрерывна во всех точках дуги AB, а сама эта дуга не имеет особых точек, то существует предел $\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i$ при стремлении всех Δx_i к нулю, и он не зависит ни от способа разбиения дуги AB на части, ни от выбора точки M_i на каждой частичной дуге. Этот предел *называется криволинейным интегралом II типа от $P(x, y)\,dx$ по дуге (AB) и обозначается символом* $\int_{(AB)} P(x, y)\,dx$, т. е.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i = \int_{(AB)} P(x, y)\,dx.$$

Если бы значение функции $P(x, y)$ в точке $M_i(x_i, y_i)$, т. е. $P(x_i, y_i)$, мы умножили не на Δx_i, а на Δy_i, т. е. на проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось Oy, то получили бы произведение $P(x_i, y_i)\Delta y_i$. Предел суммы таких произведений при условии, что все Δy_i стремятся к нулю, был бы также криволинейным интегралом II типа и обозначался бы так: $\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dy$;

$$\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\,\Delta y_i = \int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dy.$$

В том случае, когда на дуге (AB) заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то можно рассмотреть криволинейные интегралы:

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx \text{ и } \int\limits_{(AB)} Q(x, y)\,dy. \tag{A}$$

Сумму этих двух интегралов обозначают символом

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{5,9}$$

(При этом предполагается, что оба интеграла (A) вычисляются в одном и том же направлении).

Свойства криволинейного интеграла II типа

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл II типа меняет знак на противоположный, т. е.

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int\limits_{(BA)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

(для криволинейного интеграла I типа направление интегрирования роли не играет).

2. Если точка C находится внутри дуги AB, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{(AC)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy +$$
$$+ \int\limits_{(CB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Если (L) — замкнутая кривая, то криволинейный интеграл II типа определяется так же. В этом случае следует обязательно указывать направление интегрирования, причем положительным направлением обхода замкнутого контура по условию считается то, при котором область, которую ограничивает этот контур, остается слева.

Когда криволинейный интеграл вычисляется по замкнутому контуру, он обозначается символом

$$\oint\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

причем на кружке, помещенном на знаке интеграла, указывается стрелкой направление обхода контура.

Формула для вычисления криволинейного интеграла II типа

Вычисление криволинейного интеграла второго типа сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая (L), по которой вычисляется криволинейный интеграл, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а также их производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ — непрерывные функции t, то вычисление криволинейного интеграла производится по формуле

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt. \quad (5{,}10)$$

Если же кривая (L) задана явным уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, то криволинейный интеграл II типа вычисляется по формуле

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]\,f'(x)\}\,dx. \quad (5{,}11)$$

Задача 5,11. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2)\,dx$, если (L) — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $x = 2$ до точки $x = 4$.

Решение. Кривая задана явным уравнением. Для вычисления интеграла применим формулу (5,10). Эта же формула применяется и для решения задач 5,11—5,16.

Пользуясь уравнением параболы $y = 2x^2$, заменим в подынтегральной функции y^2 на $4x^4$. Тогда

$$\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2)\,dx = \int\limits_{2}^{4} (x^2 + 4x^4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_2^4 = \frac{12184}{15}.$$

Ответ. $\frac{12184}{15}$.

Задача 5,12. Вычислить интеграл $\int\limits_{L} x^2\,dx + \sqrt{x}y\,dy$, где (L) есть четверть окружности $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против часовой стрелки, лежащая в первой четверти.

Решение. Из уравнения окружности $x^2+y^2=R^2$ выразим y в функции от x: $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. Перед корнем следует удержать знак плюс, так как в первой четверти $y \geqslant 0$. Найдем теперь dy: $dy=-\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$. После подстановки y и dy под знак интеграла подынтегральная функция будет зависеть только от x, а пределы интегрирования по x, учитывая, что интегрирование ведется против часовой стрелки, будут $+R$ и 0.

Таким образом,

$$\int\limits_{(L)} x^2\,dx+\sqrt{x}y\,dy=\int\limits_{R}^{0} x^2\,dx+\sqrt{x}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{R}^{0}(x^2-x\sqrt{x})\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_{R}^{0}=-\frac{R^3}{3}+\frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{15}R^2(6\sqrt{R}-5R).$$

Задача 5,13 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)}(x^2-y^2)\,dy$, где (L) — дуга кубической параболы $y=2x^3$ от точки $x=0$ до точки $x=1$.

Указание. Из уравнения кривой следует, что $dy=6x^2\,dx$, а $y^2=4x^6$.

Ответ. $-\frac{22}{15}$.

Задача 5,14 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\limits_{(L)}(x^2-y^2)\,dx$, где (L) — дуга параболы $y=x^2$ от точки $x=0$ до точки $x=2$; 2) $\int\limits_{(L)}(x^2-y^2)\,dy$, где (L) — та же дуга, что и в первом интеграле.

Ответ. 1) $-\frac{56}{15}$; 2) $\frac{40}{3}$.

Задача 5,15 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $I=\int\limits_{(L)}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy$, где (L): 1) отрезок прямой, соединяющей точки $A\,(2, 3)$ и $B\,(3, 5)$; 2) дуга параболы $y=x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$; 3) дуга параболы $x=y^2$. Соединяющие точки — $C\,(0, 0)$ и $D\,(4, 2)$.

Ответ. 1) Уравнение отрезка прямой: $y=2x-1$; $dy=2dx$. $I=\frac{23}{2}$; 2) $\frac{38}{3}$; 3) $dx=2y\,dy$; $I=\frac{22}{3}$.

Задача 5,16. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{(L)} (2y - 6xy^3)\,dx + (2x - 9x^2y^2)\,dy,$$

где (L) — одна из линий, соединяющих точки $O(0, 0)$ и $A(2, 2)$:

1) отрезок прямой, соединяющий эти точки;

2) парабола $y = \frac{1}{2}x^2$;

3) парабола $x = \frac{1}{2}y^2$;

4) кубическая парабола $y = \frac{1}{4}x^3$.

Решение. 1) Уравнение прямой: $y = x$. Поэтому $dy = dx$. Заменяя в подынтегральном выражении y на x, а dy на dx, получим, что

$$I = \int\limits_0^2 (2x - 6x\cdot x^3)\,dx + (2x - 9x^2\cdot x^2)\,dx = -88.$$

2) Из уравнения кривой $y = \frac{1}{2}x^2$ следует, что

$$dy = x\,dx.$$

Заменяя в подынтегральном выражении y на $\frac{1}{2}x^2$, а dy на $x\,dx$ получим, что

$$I = \int\limits_0^2 \left[2\cdot\frac{1}{2}x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3\right]dx + \left[2x - 9x^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right]x\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (3x^2 - 3x^7)\,dx = -88.$$

3) Так как уравнение линии $x = \frac{1}{2}y^2$, то $dx = y\,dy$. Заменяя в подынтегральном выражении x на $\frac{1}{2}y^2$, а dx на $y\,dy$, получим учитывая, что y изменяется от 0 до 2,

$$I = \int\limits_0^2 \left[2y - 6\cdot\left(\frac{1}{2}y^2\right)\right]y\,dy + \left[2\cdot\frac{1}{2}y^2 - 9\cdot\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2\cdot y^2\right]dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(3y^2 - \frac{21}{4}y^6\right)dy = y^3 - \frac{3}{4}y^7\Big|_0^2 = 8 - \frac{3}{4}\cdot 128 = -88.$$

4) Убедитесь самостоятельно, что в этом случае $I = -88$.

Итак, по какой бы из указанных кривых, соединяющих точки $(0, 0)$ и $(2, 2)$, мы ни вычисляли этот интеграл, оказывается, что он равен одному и тому же числу. Иначе говоря, величина заданного интеграла не зависит от того, по какой из указанных кривых, соединяющих эти точки, он вычисляется. Можно показать, что и вообще величина этого интеграла по любой кривой, соединяющей две заданные точки, окажется одной и той же.

Этот интеграл также равен —88, если его вычислить и по ломанной OCA, состоящей из отрезка OC оси Ox и отрезка CA прямой $x = 2$.

В этом случае на отрезке OC $y = 0$; $dy = 0$. По отрезку OC $I = 0$ вследствие того, что под знаком интеграла взять $y = 0$ и $dy = 0$.

На отрезке CA: $x = 2$, $dx = 0$, y изменяется от 0 до 2

$$I = \int_0^2 (2 \cdot 2 - 9 \cdot 2^2 y^2)\, dy = (4y - 12y^3)\Big|_0^2 = -88.$$

Самостоятельно докажите, что этот интеграл равен —88, если его вычислить по ломанной OBA. На отрезке OB $x = 0$, на BA $y = 2$, $dy = 0$ (дифференциал постоянной величины равен нулю).

Решение этой задачи показывает, что подынтегральное выражение в криволинейном интеграле II типа может быть таким, что величина интеграла не зависит от той линии, по которой ведется интегрирование, а определяется только координатами начальной и конечной точек этой линии. (В таком случае говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования). Ниже будет указано условие, которому должно подчиняться подынтегральное выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ в криволинейном интеграле II типа, для того чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, соединяющего две данные точки.

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

В общем случае при одном и том же подынтегральном выражении величина криволинейного интеграла зависит от формы пути, по которому он вычисляется (иначе говоря, от кривой, по которой он берется) и от координат начальной и конечной точек этого пути.

Вместе с тем последний интеграл предыдущего практического занятия представляет пример такого криволинейного интеграла, величина которого не зависит от формы пути интегрирования, а определяется только координатами начала и конца этого пути. Если так случается, то говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Определение. *Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

называется независящим от формы пути интегрирования в области (D), если каковы бы ни были точки A и B, принадлежащие области (D), значение этого интеграла остается одним и тем же независимо от того, по какой линии с началом в точке A и концом в точке B он вычисляется, лишь бы эта линия целиком лежала в области (D).

Односвязная область. Конечная область (D) называется ***односвязной****, если она ограничена единственным замкнутым контуром.* (Иначе говоря, односвязность области означает, что в ней отсутствуют «дыры», а это в свою очередь позволяет любой замкнутый контур, лежащий внутри такой области, стянуть в точку, не выходя за пределы этой области).

Приведем теорему, которая указывает необходимое и достаточное условие для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от формы пути интегрирования.

Теорема. Если функция $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области (D), то, для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad (A)$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (6,1)$$

Напомним, что:

1) условие (6,1) является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ являлось полным дифференциалом некоторой однозначной функции, определенной

---

* Для неодносвязной области эта теорема в общем случае неверна.

в области (D). Поэтому можно утверждать, что для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования $(\breve{AB})$, а только от его концов, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом некоторой функции.

2) Если выполняется условие (6,1), т. е. если выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции, то криволинейный интеграл (A), взятый по любому замкнутому контуру, лежащему в односвязной ограниченной замкнутой области (D), равен нулю.

Обозначение. Если путь, по которому вычисляется криволинейный интеграл (A) безразличен, то употребляется обозначение

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{B}$$

где (x_0, y_0) и (x_1, y_1) координаты начала и конца пути интегрирования, а в качестве пути интегрирования в этом случае обыкновенно выбирается самый простой путь — отрезок прямой, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

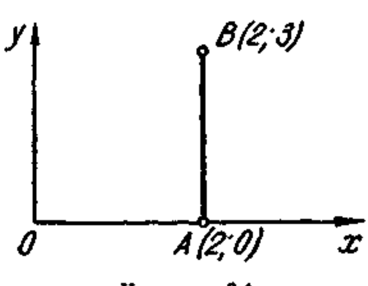
Задача 6,1. Выяснить, будет ли криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AB} (6xy + 4y^2 + 5y)\,dx + (3x^2 + 8xy + 5x)\,dy$$

зависеть от формы пути интегрирования.

Решение. Здесь функция $P(x, y) = 6xy + 4y^2 + 5y$, а функция $Q(x, y) = 3x^2 + 8xy + 5x$.

Интеграл не будет зависеть от формы пути интегрирования, если будет выполнено условие (6,1). Чтобы проверить его выполнение, найдем частные производные: от функции $P(x, y)$ по независимой переменной y, а от функции $Q(x, y)$ по независимой переменной x. (Заметим для запоминания, что функция $P(x, y)$ умножается под знаком интеграла на дифференциал переменной x, частная производная от нее берется по переменной y, а функция $Q(x, y)$ умножается в подынтегральном выражении на дифференциал переменной y частная же производная от нее берется по переменной x).



К задаче 6,1

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x + 8y + 5; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 8y + 5; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Условие (6,1) выполнено — предложенный криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

Вычислим этот интеграл по пути, соединяющему начало координат с точкой $A(2,3)$. Так как от формы пути, как мы показали, интеграл не зависит, то самым простым путем интегрирования явится отрезок прямой, соединяющий начало координат с точкой $A(2,3)$. Уравнение пути интегрирования: $y=\frac{3}{2}x$.

Поэтому, подставляя под знак интеграла $\frac{3}{2}x$ вместо y, получим

$$I=\int\limits_0^2\left(6x\cdot\frac{3}{2}x+4\left(\frac{3}{2}x\right)^2+5\cdot\frac{3}{2}x\right)dx+$$

$$+\left(3x^2+8x\cdot\frac{3}{2}x+5x\right)\cdot\frac{3}{2}dx=\int\limits_0^2\left(\frac{81}{2}x^2+15x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{81}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{15}{2}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{81}{2}\cdot\frac{8}{3}+\frac{15}{2}\cdot 4=138.$$

$\left(\text{учтено, что если } y=\frac{3}{2}x, \text{ то } dy=\frac{3}{2}dx\right)$.

Для упражнения этот же интеграл вычислить по ломаной OAB и убедиться что, получится 138 (на OA переменная y равна 0, на AB переменная x равна 2, а y изменяется от 0 до 3).

Задача 6,2 (для самостоятельного решения). Убедиться, что интеграл

$$I=\int\limits_{AB}(6xy^2+4x^3)\,dx+(6x^2y+3y^2)\,dy$$

не зависит от формы пути интегрирования. После этого вычислить его по отрезку прямой, соединяющей точки (2,3) и (3,4).

Указание. $P(x,y)=6xy^2+4x^3$; $Q(x,y)=6x^2y+3y^2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Уравнение прямой, соединяющей точки (2,3) и (3,4): $y=x+1$; $dy=dx$.

В подынтегральном выражении заменить y на $x+1$, а dy на dx. Под интегралом будет функция одной переменной x, пределы интегрирования: нижний 2, верхний 3.

Задачу можно было поставить так. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_{(2,3)}^{(3,4)}(6xy^2+4x^3)\,dx+(6x^2y+3y^2)\,dy.$$

Но такая запись допустима только в том случае, когда заранее известно, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования, т. е. что условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено.

Ответ. 426.

Задача 6,3 (для самостоятельного решения). Выяснить, будет ли интеграл

$$\int\limits_{(AB)}(2xy-5y^3)\,dx+(x^2-15xy^2+6y)\,dy$$

зависеть от пути интегрирования и вычислить его по линии AB, соединяющей точки (0,0) и (2,2).

Указание. Вычислить $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Убедиться, что $\frac{\partial P}{\partial y}=$ $=\frac{\partial Q}{\partial x}\;(=2x-15y^2)$.

За линию AB принять прямую, соединяющую указанные точки. Ее уравнение: $y=x$.

Ответ. -60.

Задача 6,4 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)}\frac{x}{(x+y)^2}\,dx+\frac{2x+y}{(x+y)^2}\,dy.$$

Указание. Прежде всего убедиться, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. За путь интегрирования выбрать прямую, соединяющую точки (1,1) и (3,2). Ее уравнение $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Ответ. $\ln\frac{5}{2}-\frac{1}{10}$.

Задача 6,5. Будет ли криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(L)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}\,dy,$$

взятый по замкнутому контуру, равен нулю?

Решение. Из 2) на стр. 110 следует, что при выполнении условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ криволинейный интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю. Поэтому, чтобы ответить на вопрос задачи, следует только убедиться в том, что условие это выполнено. У нас

$$P(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4};\quad Q(x,y)=-\frac{2y}{x^3}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{6y}{x^4};\;\;\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y}{x^6}\,3x^2=\frac{6y}{x^4}.$$

Значит, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и на вопрос задачи следует дать утвердительный ответ: заданный интеграл, если его взять по замкнутому контуру, равен нулю. Однако следует указать, что этот контур не должен ни охватывать, ни проходить через точку с абсциссой $x = 0$.

Задача 6,6. Будет ли криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(L)} (x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy),$$

где (L) замкнутый контур, равен нулю? Подтвердить полученное заключение непосредственным вычислением по какому-нибудь замкнутому контуру.

Решение. Проверим, является ли подынтегральное выражение полным дифференциалом. У нас

$$P(x, y) = x^3 + xy^2; \quad Q(x, y) = x^2y + y^3;$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy.$$

Этим доказано, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и, значит, можно утвердительно ответить на вопрос задачи: по замкнутому контуру заданный интеграл равен нулю.

Теперь подтвердим это заключение непосредственным вычислением этого интеграла по какому-нибудь замкнутому контуру. В качестве такого контура выберем, например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Параметрические уравнения такой окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Тогда $x^2 + y^2 = 1$; $dx = -\sin t\,dt$;

$x\,dx = -\sin t \cos t\,dt$; $y = \sin t$; $dy = \cos t\,dt$; $y\,dy = \sin t \cos t\,dt$.

Подынтегральное выражение $(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) =$

$$= 1(-\sin t \cos t\,dt + \sin t \cos t\,dt) = 0.$$

По этому контуру интеграл равен нулю. По любому другому замкнутому контуру он также окажется равным нулю.

Уравнение окружности можно было задать и не параметрическими уравнениями, а в виде $x^2 + y^2 = 1$. Тогда, дифференцируя, получим: $2x\,dx + 2y\,dy = 0$ или $x\,dx + y\,dy = 0$. Поэтому подынтегральная функция равна нулю.

Этот же интеграл вычислить по периметру треугольника с вершинами в точках (0,0); (1,0); (1,1).

Задача 6,7 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy,$$

убедившись сначала, что он не зависит от пути интегрирования.

Ответ. 56.

Задача 6,8 (для самостоятельного решения). Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие интегралы:

$$(1)\quad \int\limits_{(2,\,1)}^{(1,\,2)} \left(2xy^2+3x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{y^2}\right)dx+\left(2x^2y+3y^2+\frac{1}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}\right.dy$$

(вдоль путей, не пересекающих координатных осей и не проходящих через начало координат).

$$2)\quad \int\limits_{(2,1)}^{(5,\,3)} \frac{-y^2\,dx+x^2\,dy}{(x-y)^2}$$

(вдоль путей, которые не пересекают биссектрису первого и третьего координатных углов).

$$3)\quad \int\limits_{(1,1)}^{(\sqrt{3},\,1)} \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}\,dx-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}\,dy.$$

Ответ. 1) $-\frac{15}{4}$; 2) 5,5; 3) $\ln\frac{\pi}{3}$.

II. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал

Сведения из теории

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,\,y)\,dx+Q(x,\,y)\,dy=0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть удовлетворяет условию

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Общий интеграл такого уравнения может быть найден по одной из следующих двух формул:

$$\int_a^x (P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy = C \tag{6,3}$$

или

$$\int_b^y Q(x, y)\,dy + \int P(x,b)\,dx = C, \tag{6,4}$$

где нижние пределы a и b могут быть выбраны произвольно.

В формуле (6,3) во втором интеграле функция $Q(x, y)$ преобразовывается: в нее вместо переменной x подставляется a — нижний предел первого интеграла и она становится равной $Q(a, y)$. Пользуясь произвольностью числа a, его следует выбрать так, чтобы функция $Q(a, y)$ стала наиболее простой.

Это указание относится и к формуле (6,4). В этой формуле функция $P(x, b)$ получается из функции $P(x, y)$, если в ней переменную величину y заменить нижним пределом b первого интеграла. Ясно, что и число b выгодно выбрать так, чтобы функция $P(x, b)$ оказалась наиболее простой.

Задача 6,9. Найти общий интеграл уравнения

$$\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0.$$

Решение. Прежде всего следует убедиться в том, что левая часть уравнения является полным дифференциалом. Здесь

$$P(x, y) = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}; \quad Q(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Отыскиваем $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Заключение. Левая часть уравнения есть полный дифференциал. Для отыскания общего решения уравнения применим формулу (6,3). Возникает вопрос о выборе нижнего предела a в первом интеграле этой формулы. Конечно, было бы очень хорошо, если бы можно было взять этот предел равным нулю, так как в этом случае замена в функции $Q(x, y)$ переменной x нулем преобразовала бы ее в $Q(0, y) = \frac{1}{y}$. Но, к сожалению, этого сделать нельзя, так как интеграл

$$\int_0^x P(x, y)\,dx = \int_0^x \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

становится несобственным. Положим $a=1$. Тогда, заменив в $Q(x, y)$ x на 1, получим

$$Q(1, y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{(1-y)^2},$$

и формула (6,3) дает

$$\int_1^x\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\int\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{(1-y)^2}\right]dy=C.$$

При вычислении первого интеграла переменная y должна рассматриваться как величина постоянная.

Выполнив интегрирование, получим:

$$\left(-\frac{y^2}{x-y}-\ln x\ \right|_1^x+\ln y-\frac{1}{1-y}=C$$

или

$$-\frac{y^2}{x-y}-\ln x+\frac{y^2}{1-y}+\ln y-\frac{1}{1-y}=C.$$

Преобразования в левой части приводят к выражению

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x-y}+\frac{y^2-1}{1-y}=C,$$

откуда

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x-y}-y-1=C. \qquad (A)$$

Относя -1 к произвольной постоянной, получаем окончательно:

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}=C.$$

Если бы вместо $a=1$ мы взяли бы любое другое число, не равное нулю, то в левую часть равенства (А) входила бы другая постоянная величина, а не -1 и ее мы опять-таки ввели бы в состав произвольной постоянной.

Задача 6,10 (для самостоятельного решения). Найти общие интегралы уравнений, убедившись сначала, что их левая часть является полным дифференциалом;

1) $[\sin 2x-2\cos(x+y)]\,dx-2\cos(x+y)\,dy=0.$

Указание. Применить формулу (6,3). Нижний предел в первом интеграле взять равным 0.

2) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}\,dy=0.$

Указание. Удобно применить формулу (6,4), взяв нижний предел $b=0$.

3) $\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy=0.$

4) $\left(\frac{x+y+1}{x^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx-\left(\frac{x+y}{xy}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0;$

5) $\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0;$

6) $\frac{y}{x^2+y^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\,dx-\frac{x}{x^2+y^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\,dy=0;$

7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx+\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}\,dy=0;$

8) $(\sin y+y\cos x)\,dx+(x\cos y+\sin x)\,dy=0;$

9) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy=0;$

10) $\frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dx-\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dy=0.$

Указание. Применить формулу (6,3). В первом интеграле положить нижний предел $a=1$. При вычислении интеграла

$$\int_1^x \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dx$$

удобно применить подстановку $x=y\sec z$, которая приведет к вычислению интеграла

$$\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{\sec^2 z}{1+\sec^2 z}\,dz=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{dz}{1+\cos^2 z}=$$

$$=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{dz}{\sin^2 z+2\cos^2 z}=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{2+\operatorname{tg}^2 z}\,dz=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}\right)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y},$$

а

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}\right)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Поэтому

$$\int_1^x \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{2}\,y} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}\,y}, \qquad (A)$$

Функция

$$Q(x, y) = \frac{-\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Подставляя в нее $x=1$ — нижний предел первого интеграла, получим, что

$$Q(1, y) = \frac{-\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1-y^2}}.$$

Интеграл $-\int \frac{\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1-y^2}}\,dy$ удобно вычислить подстановкой $y=\sin z$, которая приведет к интегралу

$$-\sqrt{2}\int\frac{dz}{1+\sin^2 z} = -\sqrt{2}\int\frac{dz}{2\sin^2 z+\cos^2 z} =$$

$$= -\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\cos^2 z}\,dz}{2\operatorname{tg}^2 z+1} = \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} z) = \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right),$$

так как из $y=\sin z$ следует, что $\operatorname{tg} z = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Но

$$\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}\,y}.$$

Таким образом, получен второй интеграл в формуле (6,3). Складывая его с выражением (А), получим ответ.

Ответ.

1) $\sin^2 x - 2\sin(x+y) = C$;

2) $\frac{x^2+y^2}{x^3} = C$;

3) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$;

4) $\ln\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y+1}{x} = C$;

5) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C$;

6) $e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = C$;

7) $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}) = C$;

8) $x\sin y + y\sin x = C$;

9) $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$;

10) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{2}\,y} = C$.

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Формула Грина. Вычисление площади при помощи криволинейного интеграла.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Формула Грина

Криволинейный интеграл по простому замкнутому гладкому контуру (C), ограничивающему односвязную область (D), может быть преобразован в некоторый двойной интеграл по области (D), ограниченной этим контуром.

Это преобразование выполняется по формуле Грина, которая записывается так:

$$\oint\limits_{(C)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (7,1)$$

Предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, а также их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области (D) и на контуре (C), который ее ограничивает, причем контур (C) пробегается в положительном направлении, т. е. так, что область (D) остается слева.

Если формулу (7,1) Грина прочесть справа налево, то можно сказать, что она сводит вычисление двойного интеграла по области (D) к вычислению криволинейного интеграла, взятого по контуру, ограничивающему эту область.

Формула (7,1) справедлива не только для указанных областей (D), но и для более сложных областей, ограниченных несколькими простыми гладкими контурами. В этом случае

$$\oint\limits_{(C)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

следует рассматривать как сумму интегралов по составляющим контурам, причем интегрирование по этим контурам должно вестись в таком направлении, чтобы область (D) оставалась слева.

Многие криволинейные интегралы по замкнутому контуру удобно вычислять, сводя их к двойному интегралу.

Задача 7,1. Применяя формулу Грина, показать, что криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(C)} (6xy + 5y)\,dx + (3x^2 + 5x)\,dy$$

по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить это заключение, вычислив этот интеграл по контуру, ограниченному линиями: $y = 0$; $x = 3$; $y = \sqrt{x}$.

Решение. Чтобы применить формулу Грина, следует найти $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и под знак двойного интеграла подставить их разность $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. У нас $P(x, y) = 6xy + 5y$; $Q(x, y) = 3x^2 + 5x$. Поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 5$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 6x + 5$. Подставляя выражения $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в (7,1), получаем

$$\oint\limits_{(C)} (6xy + 5y)\, dx + (3x^2 + 5x)\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(D)} [(6x + 5) - (6x + 5)]\, dx\, dy = \iint\limits_{D} 0 dx\, dy = 0.$$

Тем самым доказано требуемое.

Доказать, что заданный криволинейный интеграл, вычисленный по замкнутому контуру, равен нулю, можно, конечно, и не прибегая к формуле Грина. Из равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ следует, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, а в этом случае криволинейный интеграл по замкнутому контуру, при соблюдении известных условий, равен нулю.

Второе требование задачи следует выполнить самостоятельно.

Задача 7,2. Вычислить, применяя формулу Грина, интеграл

$$\oint\limits_{(C)} -x^2 y\, dx + xy^2\, dy,$$

где (C) — окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Решение. Здесь $P(x, y) = -x^2 y$; $Q(x, y) = xy^2$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$.

Подставляя эти значения в формулу (7,1), получим

$$I = \oint\limits_{(C)} - x^2 y\, dx + xy^2\, dy = \iint\limits_{(D)} [y^2 - (-x^2)]\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Здесь (D) — круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = a^2$.

Вычисление полученного двойного интеграла удобно провести в полярных координатах. Элемент площади $dx\,dy$ надо заменить на $\rho d\rho\, d\varphi$, а $x^2+y^2=\rho^2$. Поэтому

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint\limits_{(D)}\rho^2\cdot\rho d\rho\, d\varphi=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho^3 d\rho=2\pi\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Подчеркнем, что формулу Грина можно применять только тогда, когда функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой области (D), т. е. внутри области (D) и на ее контуре. Так, например, приводя вычисление интеграла

$$I=\oint\limits_{(C)}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy \qquad (A)$$

к двойному интегралу по формуле Грина, следует найти $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Окажется, что $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, т. е. $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, а потому двойной интеграл в правой части формулы (7,1) будет равен нулю, следовательно, и заданный интеграл I, вычисленный по любому замкнутому контуру, равен нулю. Однако такое заключение для *любого* замкнутого контура является неверным. Например, если вычислить этот интеграл по окружности $x=a\cos t$; $y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ с центром в начале координат, то можно легко проверить, что он будет равен не нулю, как это следует из формулы Грина, а 2π (проверьте!).

Такое несовпадение результатов объясняется тем, что в круге (D) с центром в начале координат подынтегральные функции $P(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ и $Q(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ не являются непрерывными.

Интеграл (A) будет равен нулю только тогда, когда область (D) не содержит внутри себя начало координат.

Задача 7,3 (для самостоятельного решения). Вычислить с помощью формулы Грина интеграл

$$\oint\limits_{(C)}\frac{y}{x}\,dx+2\ln x\,dy,$$

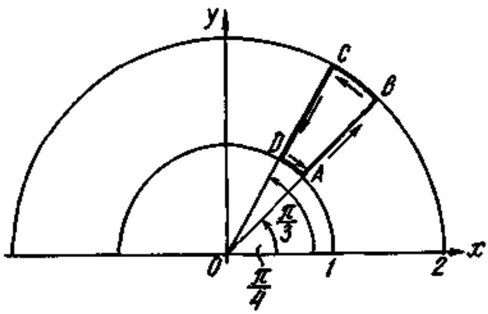
где (C) — замкнутый контур, составленный из отрезка оси Ox от точки (1,0) до точки (2,0), отрезка прямой $y=4-2x$ и отрезка прямой $x=1$ от точки (1,0) до точки (1,2).

Ответ. $4\ln 2-2$.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения). С помощью формулы Грина вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{(C)} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\, dy,$$

где (C) — замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4\,(y > 0)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y = \sqrt{3}x\ (y > 0)$, заключенных между этими окружностями.



К задаче 7,4

Указание.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2};\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

По формуле Грина заданный интеграл

$$I = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Выгодно перейти к полярным координатам

$$I = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

(D) — часть кругового кольца, ограниченная указанными линиями. В области (D) переменная ρ изменяется от 1 до 2, а переменная φ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$.

Ответ. $\frac{\pi}{12} \ln 2$.

Задача 7,5. (для самостоятельного решения). Криволинейный интеграл предыдущей задачи по тому же контуру вычислить, не применяя формулы Грина.

Указание. Переменная x изменяется на отрезке AB от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до $\sqrt{2}$, на отрезке CD от 1 до $\frac{1}{2}$ (установите это самостоятельно).

Уравнения окружностей преобразуйте к параметрической форме. Получатся уравнения $x = \cos t$; $y = \sin t$ и $x = 2\cos t$; $y = 2\sin t$. Параметр t изменяется: на дуге окружности BC от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$, а на дуге DA от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{4}$.

Интегралы по этим двум дугам взаимно уничтожаются. Интеграл по отрезку AB равен $\frac{3}{4}\pi \ln 2$, а по отрезку CD он равен $-\frac{2}{3}\pi \ln 2$.

2. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов

С помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры (D), ограниченной кусочно-гладкой кривой вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} x\,dy - y\,dx, \qquad (7{,}2)$$

где (C) — контур, ограничивающий искомую площадь, а интегрирование по этому контуру ведется в положительном направлении, т. е. таком, чтобы область (D) оставалась слева.

Подынтегральное выражение в этой формуле легко запомнить, если его записать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix}.$$

Для вычисления площади с помощью криволинейного интеграла применяются также и такие формулы:

$$S = -\oint\limits_{(C)} y\,dx; \qquad (7{,}3)$$

$$S = \oint\limits_{(C)} x\,dy, \qquad (7{,}4)$$

однако формула (7,2) употребляется чаще.

Задача 7,6. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$\left.\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix}\right\}. \quad (0 < t < 2\pi)$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (7,2) найдем dx и dy:

$$dx = -a\sin t dt; \; dy = b\sin t dt.$$

Подынтегральное выражение в этой формуле равно

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -a\sin t dt & b\cos t dt \end{vmatrix} = \\ = ab\cos^2 t dt + ab\sin^2 t dt = ab dt.$$

Подставляя это значение подынтегрального выражения в формулу (7,2) и преобразовывая криволинейный интеграл в определенный, получим, что площадь, ограниченная эллипсом,

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} ab\,dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab\cdot 2\pi = \pi ab \text{ кв. ед.}$$

Задача 7,6 а. Определить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды

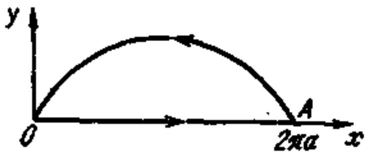
$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\}. \quad (0 < t < 2\pi).$$

Решение. Прежде всего определим подынтегральное выражение в формуле (7,2):

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt; \quad dy = a \sin t\,dt;$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(t - \sin t) & a(1 - \cos t) \\ a(1 - \cos t)\,dt & a \sin t\,dt \end{vmatrix} = $$
$$= a^2 (t \sin t + 2\cos t - 2)\,dt.$$

При вычислении интеграла в формуле (7,2) интегрирование должно вестись по контуру $OABO$ в направлении, указанном стрелками. (Такое направление выбрано потому, что вычисляемая площадь при обходе по контуру, который ее ограничивает, должна оставаться слева). На отрезке OA $y = 0$, значит, $dy = 0$, а потому на этом отрезке подынтегральное выражение $x\,dy - y\,dx$ равно нулю.



К задаче 7,6а

На дуге ABO параметр t изменяется от 2π (его значение в точке A) до 0 (его значение в начале координат). Полезно вспомнить геометрический смысл параметра t у циклоиды. Учитывая это все, по формуле (7,2) получим

$$S = \frac{1}{2}\oint_{(C)} a^2 (t \sin t + 2\cos t - 2)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2} a^2 \int_{2\pi}^{0} (t \sin t + 2\cos t - 2)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2} a^2 \cdot 6\pi = 3\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

$\left(\text{интеграл } \int_{2\pi}^{0} t \sin t\,dt = 2\pi\right)$.

Задача 7,7. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{array}\right\}. \quad (0 < t < 2\pi)$$

Решение. Определим dx и dy:

$$dx = -3a\cos^2 t \sin t\,dt; \quad dy = 3a \sin^2 t \cos t\,dt$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^3 t & a\sin^3 t \\ -3a\cos^2 t \sin t\,dt & 3a\sin^2 t \cos t\,dt \end{vmatrix} =$$
$$= 3a^2 \sin^2 t \cos^4 t\,dt + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t\,dt =$$
$$= 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t\,dt.$$

Подставляя это выражение в формулу (7,2) и учитывая, что параметр t изменяется от 0 до 2π, получим

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\cdot 3a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}(\sin t\cos t)^2\,dt = \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой эпициклоиды и соответствующей дугой круга

$$\left.\begin{aligned} x &= a\left[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t\right] \\ y &= a\left[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t\right] \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A)}$$

$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Указание. Интеграл в формуле (7,2) нужно рассмотреть как сумму двух интегралов: сначала вычислить его по кривой ABC, а затем по дуге окружности CDA. В первом случае x и y взять из уравнений (А) эпициклоиды, причем на этой кривой параметр t изменяется от 0 до 2π.

К задаче 7,8

Подынтегральное выражение

$$x\,dy - y\,dx = a^2 m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt$$

и по формуле (7,2) получится: $\pi a^2 m(1+m)(1+2m)$.

На дуге CDA, принадлежащей окружности, параметр изменяется уже от 2π до 0. Уравнения окружности, если в них сохранить тот же параметр, что и в уравнении эпициклоиды, запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos mt \\ y &= a\sin mt \end{aligned}\right\}.$$

Подынтегральное выражение $x\,dy - y\,dx$ в этом случае будет равно $a^2 m\,dt$.

Ответ. $S = \pi a^2 m^2(2m+3)$ кв. ед.

Задача 7,9 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную лемнискатой

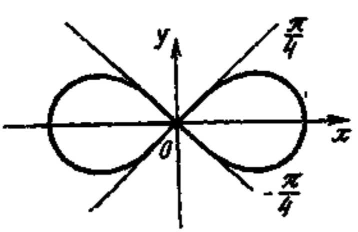
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \qquad \text{(A)}$$

Указание. Получить параметрические уравнения лемнискаты. Ввести параметр с помощью подстановки

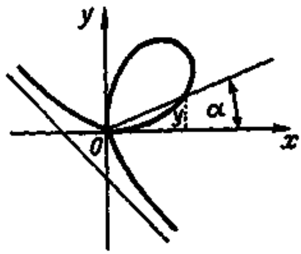
$$y = x \operatorname{tg} t. \qquad \text{(B)}$$

Подставляя это значение y в уравнение (А) лемнискаты, получим параметрические уравнения лемнискаты

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sqrt{2}\cos t\sqrt{\cos 2t} \\ y &= a\sqrt{2}\sin t\sqrt{\cos 2t} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$



К задаче 7,9



К задаче 7,10

Вычислить площадь одной петли (правой). Для этой петли, как видно из подстановки (В), параметр t изменяется от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$.

Подынтегральное выражение в формуле (7,2) легко определить так: из подстановки (В) следует, что $\frac{y}{x} = t$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \sec^2 t\,dt$$

или

$$x\,dy - y\,dx = x^2 \sec^2 t\,dt.$$

Подставляя сюда значение x из уравнений (C), получим

$$x\,dy - y\,dx = 2a^2 \cos 2t\,dt$$

и тогда по формуле (7,2)

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2t\,dt = a^2.$$

Ответ. $S = 2a^2$ кв. ед.

Задача 7,10 (для самостоятельного решения). Найти площадь петли листа Декарта

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Указание. Для получения параметрических уравнений контура положить

$$y = tx. \tag{A}$$

Получатся такие параметрические уравнения петли листа Декарта:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3} \end{aligned}\right\}. \tag{B}$$

Пределы, в которых изменяется параметр t, когда точка пробегает петлю, легко усмотреть из подстановки (A): $\frac{y}{x} = t$, но $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ (см. чертеж). Угол α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha$ при этом изменяется от 0 до ∞, а значит, и параметр t, который есть не что иное как $\operatorname{tg}\alpha$, также изменяется от 0 до ∞.

Подынтегральное выражение легко найдется из подстановки (A):

$$\frac{y}{x} = t; \ d\left(\frac{y}{x}\right) = dt;$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = dt; \quad x\,dy - y\,dx = x^2\,dt.$$

Подставляя сюда значение x из уравнений (B), получаем, что

$$x\,dy - y\,dx = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Площадь петли

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Ответ. $S = \frac{3}{2}a^2$ кв. ед.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos t - a\cos 2t \\ y &= 2a\sin t - a\sin 2t \end{aligned}\right\}.$$

$$(0 \leqslant t \leqslant$$

Ответ. $6\pi a^2$ кв. ед.

Илья Абрамович Каплан

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Интегральное исчисление функций одной независимой переменной. Интегрирование дифференциальных уравнений, кратные и криволинейные интегралы

Редактор *А. С. Нестеренко*
Обложка художника *А. П. Шулики*
Техредактор *Л. Т. Момот*
Крректоры *Р. Е. Дорф, Е. Т. Поступай*

Сдано в набор 22/VI 1965 г. Подписано к печати 12/X 1970 г, БЦ 50258. Формат 60×90¹/₁₆. Объем: 31,25 физ. печ. л., 31,25 усл. печ. л., 28 уч.-изд. л
Зак. 0-2385. Тираж 80 000. Цена 1 руб. 13 коп.
Св. ТПУ 1971 г. поз. 22.

Отпечатано с матриц Книжной фабрики им. Фрунзе на Типоофсетной фабрике «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров Украинской ССР, Харьков, ул. Энгельса, 11.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
4	1—2 снизу	— пло и	площади
336	15 сверху	$Y = x^k e^x \{p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\}$,	$Y = x^k e^{\alpha x}[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x]$,
460	13 сверху	$I_0 = \iiint\limits_{(v)} \gamma\, x^2 + y^2 + z^2)\, dv.$	$I_0 = \iiint\limits_{(v)} \gamma\,(x^2 + y^2 + z^2)\, dv.$

Зак. 0-2385. И. А. Каплан. Практические занятия по высшей математике.